МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять і самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

МОДУЛЬ 1

Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної

(*для студентів денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Системна інженерія*)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2017

Методичні вказівки до практичних занять і самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика» Модуль 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної (для студентів денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Системна інженерія) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : А. І. Колосов, А. В. Якунін. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 110 с.

Укладачі : д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. І. Колосов**,
канд. техн. наук, доц. **А. В. Якунін**

Рецензент **Л. Б. Коваленко**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1 від 30.08.2016 р.

Методичні вказівки розроблені відповідно до навчального плану та програми дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Системна інженерія і відображають навчальний матеріал першого семестру. У методичних вказівках розміщені теми лекційних і практичних занять відповідно до робочої програми з посиланнями на рекомендовану літературу (джерело, сторінки); приклади розв'язання типових задач, які не тільки ілюструють відповідні теоретичні питання, але й слугують зразками розв'язання й оформлення практичних завдань; питання для самодіагностики; задачі для проміжних рейтингових індивідуальних завдань; критерії оцінювання під час поточного, проміжного та підсумкового контролю. Методичні вказівки доповнено довідковим матеріалом. У кінці наведено список рекомендованої літератури.

З М І С Т

ВСТУП

Розвиток наукових досліджень і широке впровадження їх результатів у виробництво, що приводить до насичення його високими наукоємними технологіями, інформатизація всіх видів людської діяльності обумовлюють зростання ролі математичної підготовки в сучасній інженерній освіті. Математизація сучасних знань пов'язана не тільки з масовим впровадженням комп'ютерної техніки, а перш за все зі здатністю засобами математики створювати загальні адекватні моделі навколишньої дійсності. Математичні методи є важливою складовою сучасних прикладних досліджень. Їх застосування в поєднанні з ґрунтовним предметним аналізом відкриває нові можливості для науки і практики. Використання та розуміння математичного інструментарію служить міцним фундаментом розв'язування багатьох прикладних задач. Крім того, математика виконує функцію мови інших наук, що дає зручні та плідні способи опису процесів і явищ навколишнього світу. Математика також служить невід'ємною складовою загальної культури.

Усе це зумовлює важливість і необхідність вивчення дисципліни «вища математика» у систематизованій формі з подальшим активним застосуванням математичних методів у прикладних дослідженнях.

Мета дисципліни – забезпечити належну фундаментальну математичну підготовку студентів та сформувати у них знання та вміння застосовувати її для аналізу різноманітних явищ з орієнтацією на сфери професійної діяльності. Завдання дисципліни – допомогти студентам засвоїти основи математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і практичних задач, виробити вміння та навички математичного дослідження прикладних об'єктів, прищепити студентам потребу та уміння самостійно вивчати наукові джерела з математики та її прикладних застосувань, сприяти розвитку логічного та алгоритмічного мислення.

Навчальний процес з дисципліни «вища математика» для студентів факультету менеджменту, що навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Системна інженерія» триває два семестри на першому курсі навчання. На лекціях викладається зміст, проводиться аналіз основних понять і методів вищої математики. На практичних заняттях студенти одержують пояснення теоретичних положень дисципліни, опановують основні методи, підходи та засоби розв'язування математичних задач.

Важливою формою засвоєння математичного апарату є самостійна робота студентів, місце і роль якої постійно зростає. Вона включає самостійне опрацювання теоретичного матеріалу ряду тем, неперервні зусилля над виконанням домашніх поточних і проміжних індивідуальних завдань, проведення самоконтролю, творчі шукання поза межами, передбаченими програмою дисципліни.

Основні форми самостійної роботи студентів:

– організаційно-методична робота в бібліотеці та в рамках інших інформаційних середовищ, конспектування навчального матеріалу згідно з тематичним планом програми дисципліни, опрацювання підручників і посібників, довідників і словників;

– опрацювання лекційного матеріалу;

– підготовка до практичних занять;

– самостійне вивчення окремих тем і питань, спираючись на рекомендовані джерела;

– виконання поточних домашніх завдань;

– виконання проміжних рейтингових індивідуальних завдань;

– підготовка до проміжного контролю;

– підготовка до підсумкового екзамену;

– опрацювання конкретних проблемних питань для звертання за консультацією викладача.

Результативність навчального процесу забезпечується ефективною системою контролю, яка включає в себе опитування студентів за змістом лекцій, перевірку виконання поточних домашніх завдань, захист типових проміжних рейтингових індивідуальних завдань, перевірку виконання модульних контрольних робіт і здачу підсумкового іспиту за кожний модуль.

Методичні вказівки спрямовані на те, щоб надати студенту необхідну інформацію про зміст, форми та особливості організації навчального процесу в ході практичних занять і самостійної роботи. Головна увага приділяється практичним аспектам вивчення дисципліни. У методичних вказівках подано формули і таблиці, необхідні для розв'язування задач, наведено достатнє число детально розібраних типових прикладів, ознайомлення з якими дозволяє студенту при незначній допомозі зі сторони викладача оволодіти основними методами розв'язування задач певного типу, а також запропоновані поточні завдання і проміжні рейтингові індивідуальні завдання для самостійного розв'язування. Упорядники свідомо уникають задач підвищеної складності, оскільки мають за мету навчити студента розв'язувати основні задачі, що становлять деякий мінімум, необхідний для засвоєння студентом згідно вимог програми дисципліни.

Дані вказівки допоможуть студентам оволодіти методикою розв'язування практичних задач, сприятимуть набуттю математичних компетенцій і активізують їх самостійну роботу. Студенти мусять усвідомити, що тільки активна робота під час аудиторних занять, над навчальною та науковою літературою, відвідування консультацій, виконання практичних завдань в аудиторії та поза нею, самоорганізація, самовдосконалення і самодіагностика є запорукою успішного оволодіння програмним матеріалом з вищої математики, а в подальшому – успішного опанування спеціальними дисциплінами, досягнення професійної майстерності та самореалізації себе як особистості.

1 ЗМІСТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ЧАСТИНИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1.1 Рекомендації щодо роботи з теоретичним матеріалом

Основна форма аудиторних занять з вищої математики – лекція. Вона розвиває у студентів інтерес до знань, привертає увагу до основної системи математичних понять. На лекції викладають основний зміст навчального розділу, проводять аналіз ключових категорій, понять і математичних методі, повідомляють новітні досягнення, ставлять проблеми, розставляють акценти, приводять факти з історії науки, дають інформацію для роздумів і т. п. Дидактична мета лекції полягає в тому, щоб зорієнтувати студентів у проблематиці відповідного розділу програми, висвітлити загальну схему його побудови і закласти основу для подальшого засвоєння навчальної інформації, тобто забезпечити усвідомлене сприйняття ними навчального матеріалу, його первинне осмислення і формування початкових уявлень про відповідні математичні об'єкти. Крім того, на лекції можуть бути більш докладно розглянуті окремі питання навчального розділу, що не достатньо повно висвітлені в рекомендованих посібниках.

Лекцію не можна розглядати як головне джерело знань. Основне навантаження в засвоєнні дисципліни полягає в наступній самостійній діяльності студентів над навчальними посібниками, іншими навчальними і науковими джерелами, у виконанні практичних робіт, самостійному розв'язуванні задач і вправ із залученням додаткового до лекційного теоретичного і практичного матеріалу.

Задача лекційного курсу з вищої математики – сформувати уявлення про математику як струнку логічно впорядковану й обґрунтовану систему теоретичних і практичних знань з високим рівнем абстракції та великою глибиною теоретичних положень. Успішне оволодіння вузівським курсом вищої математики вимагає від студентів високої культури теоретичного мислення, засвоєння і вироблення спеціальних методів наукового пізнання, вмінь і навичок аналітико-синтетичної діяльності. Вони включають у себе формування вмінь і навичок:

– виділяти суттєві і несуттєві сторони навчальної інформації, спільні та відмінні ознаки й особливості математичного об'єкта, його суттєві зв'язки з іншими явищами і процесами;

– виявляти і засвоювати загальні та специфічні закономірності виділеного класу об'єктів;

– розглядати об'єкт з різних боків, подумки охоплювати його в цілому багатогранні;

– опановувати інформацію не на рівні уявлень, а на рівні чітких понять, правил і законів;

– структурувати, систематизувати і узагальнювати отриману інформацію, проводити пошук нових сфер застосування сформованих знань;

– використовувати одержані знання для розв'язування практичних і прикладних задач з орієнтацією на фахові спрямування;

– проводити наукові дослідження з певних конкретних проблем, займатися прикладною науково-дослідною роботою.

До лекції потрібно завчасно готуватися, уважно на ній слухати, вникати в суть і обов'язково конспектувати. Записи в конспекті повинні бути упорядковані, виглядати чисто й акуратно, що дозволить уникнути численних помилок, які відбуваються через недбалі та безладні записи. Якщо якась частина лекції залишиться все ж не засвоєною, то потрібно прикласти додаткові зусилля по оволодінню незрозумілою інформацією при підготовці до практичних занять і наступної лекції, а також наприкінці вивчення відповідного розділу.

З метою роз’яснення складних для розуміння конкретних моментів можна звертатися за консультацією до викладача. При цьому в своїх запитаннях студент повинен точно вказати, у чому полягають труднощі. Якщо він не розібрався в поясненнях, доведенні теореми чи у виведенні формули за лекціями або посібником, то потрібно вказати, яке використовувалося джерело, конкретні його сторінки, де розглядається це питання, і що саме викликало труднощі.

Важливим елементом пізнавальної діяльності з опанування теоретичного матеріалу служить вміння опрацьовувати лекції, навчальну та спеціальну математичну літературу. Можна вказати наступні два основні етапи роботи над теоретичною інформацією:

а) перше ознайомче читання з виділенням в інформації логічно закінчених розділів, кожен з яких спочатку корисно проглянути в цілому, намагаючись ухопити його суть, головну логічну схему, основні положення та ключові поняття. Одночасно потрібно встановити, які відомі поняття, визначення і символи використовуються в даному розділі, та вичленити нову інформацію. Визначення нових понять треба добре зрозуміти. Далі доцільно усвідомити сенс і суть наведених теорем та їх наслідків, що приводяться у цьому розділі. При першому читанні корисно виділити мало зрозумілі місця, наприклад, підкреслити або позначити знаком питання. В результаті пізнавальної діяльності має бути сформоване загальне уявлення про навчальний матеріал розділу на рівні найбільш значущих, ключових положень і понять і зв’язків між ними;

б) повторне читання повинно бути глибоким і супроводжуватися обов'язковим письмовим виконанням всіх перетворень і міркувань, у тому числі пропущених у тексті для скорочення записів. При цьому потрібно прагнути зрозуміти логіку доведення, його основні передумови та ідеї, з’ясувати, що є головним у доведенні, на яких основних положеннях воно будується. Потрібно домогтися точного уявлення про те, в якому місці доведення використано кожне припущення теореми, скласти загальну схему її доведення. Корисно подумки відтворити найбільш трудомісткі моменти, провести систематизацію та узагальнення вивченої інформації, зв’язати її з попереднім матеріалом, проаналізувати можливі застосування. Треба чітко з’ясувати і завчити основні поняття, властивості та правила, яким підкоряються відповідні математичні об'єкти, теореми, що обслуговують головні поняття та їх взаємозв'язки, основні застосування даної теорії.

Треба звернути увагу, що недостатність засвоєння того чи іншого теоретичного блоку інколи з'ясовується лише при вивченні наступного навчального матеріалу. Тоді потрібно повернутися назад і повторно опрацювати погано вивчений розділ.

1.2 Теми лекційних занять з посиланнями на рекомендовану літературу

Змістовий модуль 1.1 Аналітична геометрія на площині. Вступ до аналізу. Лінійна алгебра

Тема 1.1.1 Елементи аналітичної геометрії на площині – 4 год.

Декартова прямокутна система координат на площині. Відстань між двома точками. Поділ відрізка у заданому відношенні. Пряма лінія на площині. Основні типи рівняння прямої.

Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої. Типові задачі на пряму лінію.

Література: [6, с. 6–19] або [3, с. 76–83], або [8, с. 36–44].

Теми рефератів:

1. Основні типи рівняння прямої на площині та зв’язок між ними.
2. Взаємне розміщення точок і прямих на площині.
3. Розв’язування задач планіметрії засобами аналітичної геометрії.

Тема 1.1.2 Елементи теорії границь – 8 год.

Змінні та сталі величини. Нескінченно малі і нескінченно великі змінні величини та їх властивості.

Границя змінної величини. Властивості границь. Перша та друга стандартні границі. Невизначеності та їх розкриття.

Поняття функції. Способи задання функції. Складена функція. Обернена функція. Основні елементарні функції та їх графіки.

Неперервність. Властивості неперервних функцій.

Література: [6, с. 35–82] або [3, с. 126–175, 179–191], або [8, с. 74–94, 96–100].

Теми рефератів:

1. Еквівалентні нескінченно малі та нескінченно великі вели-

чини, їх застосування.

2. Застосування паралельного перенесення і деформації розтягу (стиснення) при побудові графіків функцій.

3. Розривні функції. Знаходження точок розриву.

Змістовий модуль 1.2 Диференціальне числення функцій однієї змінної. Векторна алгебра. Аналітична геометрія в просторі

Тема 1.2.1 Похідна. Диференціал. Основні теореми диференціального числення – 8 год.

Поняття похідної як швидкості зміни функції. Геометричний зміст похідної. Дотична і нормаль. Властивості похідної. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних.

Похідна складеної функції. Похідні неявної та оберненої функцій. Похідна параметрично заданої функції. Правило логарифмічного диференціювання.

Диференціал функції. Властивості диференціала. Зв'язок між диференціалом і похідною. Похідні та диференціали вищих порядків. Інваріантність форми першого диференціала.

Основні теореми диференціального числення: Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей. Формули Тейлора і Маклорена.

Література: [6, с. 121–152] або [3, с. 191–245], або [8, с. 100–115].

Теми рефератів:

1. Застосування поняття похідної та диференціала в економічних задачах.

2. Основні теореми диференціального числення.

3. Формули Тейлора і Маклорена та їх застосування.

Тема 1.2.2 Застосування похідної – 8 год.

Умови зростання та спадання функції. Необхідні умови екстремуму функції.

Достатні умови екстремуму функції. Найменше та найбільше значення функції на відрізку.

Умови опуклості та угнутості графіка функції та наявності перегину. Асимптоти графіка функції.

Загальна схема дослідження функції та побудови графіка.

Література: [6, с. 152–177] або [3, с. 246–268], або [8, с. 115–124].

Теми рефератів:

1. Застосування достатніх умов екстремуму функції за першою і другою похідною.

2. Знаходження глобальних екстремумів функції на необмеженому проміжку.

3. Кривина плоскої лінії. Коло і радіус кривини.

Тема 1.2.3 Елементи векторної алгебри. Елементи аналітичної геометрії в просторі – 2 год.

Поверхні другого порядку. Загальне рівняння поверхні другого порядку. Зображення і дослідження форми поверхонь методом паралельних перерізів. Циліндричні поверхні. Круговий циліндр. Еліптичний циліндр. Гіперболічний циліндр. Параболічний циліндр. Конічні поверхні. Конус другого порядку. Поверхні обертання. Сфера. Еліпсоїд. Однопорожнинний гіперболоїд. Двопорожнинний гіперболоїд. Еліптичний параболоїд. Гіперболічний параболоїд.

Література: [6, с. 210–219] або [3, с. 114–125], або [8, с. 68–73].

Теми рефератів:

1. Взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі.

2. Просторові лінії та способи їх задання.

3. Лінійчаті поверхні та їх застосування.

1.3 Теми теоретичного матеріалу для самостійного опрацювання з посиланнями на рекомендовану літературу

1.3.1 Криві другого порядку. Параметрично задані лінії – 4 год.

Пряма як лінія першого порядку. Загальне рівняння лінії другого порядку. Рівняння кола із заданим центром і радіусом.

Канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи. Дослідження їх форми. Типові задачі на криві другого порядку.

Рівняння деяких ліній у параметричній формі.

Література: [6, с. 19–35] або [3, с. 66–71, 97–113], або [8, с. 44–50].

1.3.2 Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі – 2 год.

Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі. Невизначеності та їх розкриття.

Література: [6, с. 57–60] або [3, с. 175–179], або [8, с. 95–96].

1.3.3 Елементи теорії матриць і визначників. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь – 12 год.

Поняття матриці. Дії над матрицями. Обернена матриця. Многочлени від матриці.

Поняття визначника. Правило обчислення визначника. Властивості визначників. Зведення визначника до ступінчастої форми.

Обчислення оберненої матриці за допомогою визначників (алгебраїчних доповнень).

Означення системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розгорнута і матрична форми її запису. Однорідна та неоднорідна системи. Розв'язок системи. Сумісна, несумісна, визначена та невизначена системи.

Розв’язування квадратних систем за допомогою оберненої матриці, за формулами Крамера.

Елементарні (еквівалентні) перетворення матриць. Поняття про ранг матриці. Теорема Кронекера – Капеллі.

Розв’язування систем методом Гаусса послідовного вилучення змінних.

Умова наявності ненульових розв’язків однорідної квадратної системи.

Власні числа, власні вектори і характеристичний многочлен матриці.

Література: [6, с. 83–116] або [3, с. 6–31], або [8, с. 4–22].

1.3.4 Елементи векторної алгебри. Елементи аналітичної геометрії в просторі – 8 год.

Скалярні та векторні величини. Поняття вектора. Умови рівності векторів. Лінійні операції над векторами. Розкладання вектора за базисом координатних ортів. Лінійні операції над векторами, заданими своїми координатами.

Скалярний добуток векторів. Довжина вектора, кут між векторами, напрямні косинуси. Умови колінеарності та ортогональності векторів. Векторний добуток. Змішаний добуток трьох векторів. Умова компланарності трьох векторів. Геометричні застосування добутків векторів.

Означення n-вимірного векторного (точкового) простору R^n.

Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів. Базис n-вимірного простору. Координати вектора за даним базисом. Лінійні відображення та їх матриці.

Основні типи рівняння площини у просторі. Окремі випадки загального рівняння площини.

Основні типи рівняння прямої лінії в просторі. Кути між прямими і площинами. Умови паралельності і перпендикулярності. Відстань від точки до площини. Типові задачі на пряму і площину.

Література: [6, с. 178–210] або [3, с. 32–65, 73–75, 84–96], або [8, с. 23–35, 54–67].

2 ЗМІСТ ПРАКТИЧНОЇ ЧАСТИНИ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.1 Загальні рекомендації щодо роботи на практичних заняттях

Глибоке володіння математичним апаратом, ясне бачення можливостей математики та її практичних застосувань неможливе без вироблення вмінь і навичок розв’язування задач і вправ, що охоплюють відповідний матеріал. Однією з головних цілей вивчення вищої математики є озброєння студентів знаннями, вміннями і навичками, що дозволяють використовувати їх як інструмент для вивчення інших дисциплін, застосовувати у фаховій діяльності. На практичних заняттях студенти опановують основні методи, алгоритми та прийоми розв’язування математичних задач, а також одержують пояснення теоретичних положень дисципліни. Студенти отримують можливість закріпити і поглибити знання, здобуті на лекціях і роботою з посібниками, домогтися їх осмисленого застосування в різних умовах, проявити індивідуальні досягнення та особисті якості.

На практичних заняттях переважно вирішуються такі дидактичні завдання:

– оволодіння спеціальними математичними знаннями і розвиток логічного абстрактного мислення;

– формування основ наукового світогляду;

– підготовка до практичної діяльності;

– виховання ініціативності, наполегливості та творчого підходу до поставлених задач.

Звичайно на практичних заняттях спочатку здійснюється коротке обговорення й аналіз найбільш складних моментів у поточному домашньому завданні; потім проводиться стисле повторення теоретичного матеріалу нової теми, виділяються головні положення та фіксуються основні формули. Далі ставляться завдання по засвоєнню нової теми. Для їх розв'язування дозволяється використовувати будь-які додаткові джерела: конспекти лекцій, довідники, графічні схеми, інформаційні таблиці, допомогу викладача чи іншого студента.

Студент повинен з користю і повністю використовувати час практичного заняття, працювати з максимальною інтенсивністю, проявляти самостійність, активність, допитливість і наполегливість.

При проведенні практичних занять студент повинен суворо виконувати весь обсяг необхідної відповідної домашньої підготовки, що включає в себе:

– попереднє опрацювання відповідного теоретичного матеріалу;

– самостійне вивчення методичних рекомендацій щодо розв'язування типових задач і вправ;

– виконання домашнього завдання.

Для ефективного засвоєння програмного матеріалу студенту потрібно багато часу відводити на розв'язування завдань і вправ за кожним розділом, відпрацьовувати вміння та навички з вирішення завдань базового рівня як на практичних заняттях, так і в позааудиторній самостійній роботі, приділяти увагу творчим моментам.

Мета практичних занять – формування вмінь і навичок, які використовуються при практичному застосуванні математики. У ході вивчення відповідного матеріалу студент повинен:

– виробляти вміння розв'язувати базові математичні задачі та зводити розв'язки до практично прийнятного результату;

– розвивати логічне і алгоритмічне мислення;

– набувати навичок математичного дослідження прикладних питань з фахової сфери (застосування математичних засобів для розв'язування практичних задач, вибір оптимального розв'язку, інтерпретація та оцінка отриманих результатів);

– вчитися застосовувати сучасні обчислювальні засоби, а також користуватися таблицями та довідниками.

Хоча важливим критерієм засвоєння теорії є вміння розв'язувати задачі на пройдений матеріал, проте часто правильний розв'язок задачі одержується в результаті застосування механічно завчених формул, без розуміння суті справи. Слід зазначити, що вміння успішно розв'язувати задачі є необхідною, але недостатньою умовою гарного знання теорії.

Якщо в процесі розв'язування задач виникають питання, вирішити які самостійно не вдається (незрозумілість термінів, позначень, постановки окремих завдань та ін.), то студент може звернутися за консультацією. При цьому у своїх запитаннях він повинен точно вказати місце виникнення ускладнень, їх характер і навести передбачуваний план вирішення проблеми.

2.2 Теми та цілі практичних занять з посиланнями на рекомендовану літературу

Змістовий модуль 1.1 Аналітична геометрія на площині. Вступ до аналізу. Лінійна алгебра

Практичне заняття № 1 – 2 год.

Тема. Декартова прямокутна система координат на площині. Відстань між двома точками. Поділ відрізка у заданому відношенні. РІЗ № 1 Пряма на площині. Коло.

Мета. Виробити навички користування прямокутною системою координат і вміння розв’язувати задачі на застосування співвідношень для відстані між точками і поділу відрізка у заданому відношенні; поставити на виконання проміжне рейтингове індивідуальне завдання з аналітичної геометрії на площині.

Література: [5, с. 111, 112] або [4, с. 49–51].

Практичне заняття № 2 – 2 год.

Тема. Основні типи рівняння прямої на площині.

Мета. Виробити вміння та навички складати рівняння прямої за різними способами її задання; здійснювати перехід від одного типу рівняння до іншого.

Література: [5, с. 112–114, 121,122] або [4, с. 58–62].

Практичне заняття № 3 – 2 год.

Тема. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої. Типові задачі на пряму лінію.

Мета. Виробити вміння та навички визначати кут між прямими та відстань від точки до прямої, використовувати умови паралельності та перпендикулярності прямих; застосовувати знання про пряму при постановці та розв'язуванні задач.

Література: [5, с. 115–118, 122, 123] або [4, с. 62–65].

Практичне заняття № 4 – 2 год.

Тема. Поняття про лінії другого порядку. Рівняння кола із заданим центром і радіусом. Канонічне рівняння кола

Мета. Засвоїти поняття лінії другого порядку; виробити вміння та навички зводити рівняння кола до стандартного вигляду, визначати координати центра і радіус.

Література: [5, с. 118120, 123] або [4, с. 79, 80].

Практичне заняття № 5 – 2 год.

Тема. Канонічні рівняння еліпса та гіперболи.

Мета. Засвоїти поняття еліпса та гіперболи; сформувати вміння та навички складати канонічні рівняння зазначених ліній другого порядку і використовувати їх при постановці та розв'язуванні задач.

Література: [5, с. 119–121, 123, 124] або [4, с. 80–86].

Практичне заняття № 6 – 2 год.

Тема. Канонічне рівняння параболи. Параметрично задані лінії.

Мета. Засвоїти поняття параболи; сформувати вміння та навички складати канонічне рівняння параболи; ознайомити з параметричним способом задання ліній і виробити вміння будувати їх зображення; сформувати вміння використовувати параметричний спосіб задання ліній при постановці та розв'язуванні задач.

Література: [5, с. 119–121, 124] або [4, с. 53, 54, 86–91].

Практичне заняття № 7 – 2 год.

Тема. Узагальнення вивченого матеріалу. КР № 1 Пряма на площині. Коло.

Мета. Систематизувати знання з аналітичної геометрії на площині; провести проміжний контроль основних знань і вмінь з аналітичної геометрії на площині.

Література: [5, с. 111–124] або [4, с. 49–56, 58–65, 79–91].

Практичне заняття № 8 – 2 год.

Тема. Поняття матриці. Дії над матрицями. Обернена матриця. Поняття визначника. Правило обчислення визначника. Властивості визначників. Обчислення оберненої матриці за допомогою визначників (алгебраїчних доповнень). РІЗ № 2 Матриці. Визначники. Системи рівнянь.

Мета. Виробити вміння та навички виконувати дії з матрицями, обчислювати визначники квадратних матриць, знаходити обернену матрицю; застосовувати поняття матриці та визначника при постановці та розв'язуванні задач; поставити на виконання проміжне рейтингове індивідуальне завдання з лінійної алгебри.

Література: [5, с. 38–50, 54–61] або [4, с. 3–16].

Практичне заняття № 9 – 2 год.

Тема. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язування квадратних систем за допомогою оберненої матриці, за формулами Крамера.

Мета. Сформувати вміння та навички розв'язування квадратних систем лінійних рівнянь за правилом Крамера і методом оберненої матриці.

Література: [5, с. 62–72] або [4, с. 17–20].

Практичне заняття № 10 – 2 год.

Тема. Елементарні (еквівалентні) перетворення матриць. Поняття про ранг матриці. Теорема Кронекера – Капеллі. Розв'язування систем методом Гаусса послідовного вилучення змінних.

Мета. Виробити вміння та навички знаходити ранг матриці методом елементарних перетворень, розв'язувати системи лінійних рівнянь методом Гаусса, проводити дослідження сумісності системи лінійних рівнянь за теоремою Кронекера – Капеллі.

Література: [5, с. 50–54, 72–85] або [4, с. 20, 21, 24].

Практичне заняття № 11 – 2 год.

Тема. Умова наявності ненульових розв'язків однорідної квадратної системи. Власні числа, власні вектори і характеристичний многочлен матриці. Матричні многочлени.

Мета. Засвоїти умову наявності ненульових розв'язків однорідної квадратної системи, поняття власних чисел і власних векторів квадратної матриці і виробити вміння та навички їх знаходження; ознайомити з поняттям многочлена від матриці.

Література: [5, с. 99–103,105] або [4, с. 22, 23].

Практичне заняття № 12 – 2 год.

Тема. Границя змінної величини. Обчислення границь.

Мета. Поглибити знання про границю, виробити вміння та навички обчислювати границі за їх властивостями.

Література: [5, с. 148–152] або [4, с. 131–134].

Практичне заняття № 13 – 2 год.

Тема. Перша та друга стандартні границі. Розкриття невизначеностей. Неперервність.

Мета. Засвоїти поняття про стандартні границі та виробити вміння застосовувати їх при обчисленні границь; засвоїти поняття неперервності функції та сформувати вміння знаходити місце і тип точок розриву.

Література: [5, с. 152–170] або [4, с. 135–138, 140–144].

Практичне заняття № 14 – 2 год.

Тема. Узагальнення вивченого матеріалу. КР № 2 Границя. Матриці. Визначники. Системи рівнянь.

Мета. Систематизувати знання з лінійної алгебри та теорії границь; провести проміжний контроль основних знань і вмінь з лінійної алгебри та теорії границь.

Література: [5, с. 148–170] або [4, с. 131–144].

Практичне заняття № 15 – 2 год.

Тема. Скалярний добуток векторів. Довжина вектора, кут між векторами, напрямні косинуси. Умови колінеарності та ортогональності векторів. Векторний добуток. РІЗ № 3 Вектори. Пряма і площина у просторі.

Мета. Засвоїти поняття вектора і виробити вміння та навички виконувати лінійні операції над векторами, обчислювати довжину, напрямні косинуси і проекції вектора, скалярний та векторний добутки векторів; поставити на виконання проміжне рейтингове індивідуальне завдання з векторної алгебри й аналітичної геометрії в просторі.

Література: [5, с. 86–93, 95, 103–105] або [4, с. 37–45].

Практичне заняття № 16 – 2 год.

Тема. Змішаний добуток трьох векторів. Умова компланарності трьох векторів. Геометричні застосування добутків векторів.

Мета. Виробити вміння та навички обчислювати змішаний добуток векторів; ознайомити з поняттям базису тривимірного простору і навчити обчислювати координати вектора в новому базисі; ознайомити з геометричними застосуваннями добутків векторів.

Література: [5, с. 93, 95–99, 104, 105] або [4, с. 45–48].

Практичне заняття № 17 – 2 год.

Тема. Основні типи рівняння площини у просторі. Окремі випадки загального рівняння площини.

Мета. Виробити вміння та навички складати рівняння площини за різними способами її задання, спираючись на методи векторної алгебри; здійснювати перехід від одного типу рівняння до іншого.

Література: [5, с. 124–126,135] або [4, с. 66–69].

Практичне заняття № 18 – 2 год.

Тема. Основні типи рівняння прямої лінії в просторі.

Мета. Сформувати вміння та навички складати рівняння прямої в просторі за різними способами її задання, спираючись на методи векторної алгебри; здійснювати перехід від одного типу рівнянь до іншого.

Література: [5, с. 127, 128, 136] або [4, с. 70–72].

Практичне заняття № 19 – 2 год.

Тема. Кути між прямими і площинами. Умови паралельності і перпендикулярності. Відстань від точки до площини. Типові задачі на пряму і площину.

Мета. Сформувати вміння та навички розв'язувати задачі на взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі.

Література: [5, с. 127, 129, 130, 136, 137] або [4, с. 69, 70, 72–78].

Практичне заняття № 20 – 2 год.

Тема. Узагальнення вивченого матеріалу. КР № 3 Вектори. Пряма і площина в просторі.

Мета. Систематизувати знання з векторної алгебри й аналітичної геометрії в просторі; провести проміжний контроль основних знань і вмінь з векторної алгебри й аналітичної геометрії в просторі.

Література: [3, с. 86–137] або [2, с. 25–48, 66–78].

Практичне заняття № 21 – 2 год.

Тема. Техніка диференціювання різних класів функцій. РІЗ № 4 Похідна та її застосування.

Мета. Сформувати вміння та навички обчислювати похідні функцій на основі властивостей похідної та таблиці похідних основних елементарних функції; поставити на виконання проміжне рейтингове індивідуальне завдання з диференціального числення функцій однієї змінної.

Література: [5, с. 171–180, 184, 185] або [4, с. 145–154].

Практичне заняття № 22 – 2 год.

Тема. Диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків.

Мета. Засвоїти поняття диференціала та його зв'язок з похідною, закріпити поняття про інваріантність форми першого диференціала; сформувати вміння та навички обчислювати похідні та диференціали вищих порядків.

Література: [5, с. 180–185] або [4, с. 161–164, 166–170].

Практичне заняття № 23 – 2 год.

Тема. Розкриття невизначеностей типів $0/0$, ∞/∞, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0 за правилом Лопіталя.

Мета. Виробити вміння та навички обчислювати границі, використовуючи правило Лопіталя.

Література: [5, с. 186–191] або [4, с. 173–175].

Практичне заняття № 24 – 2 год.

Тема. Умови зростання та спадання функції. Необхідні та достатні умови екстремуму функції.

Мета. Виробити вміння та навички знаходити інтервали зростання і спадання функції; досліджувати функцію на екстремум, використовуючи необхідні та достатні умови.

Література: [5, с. 191–197] або [4, с. 177–179].

Практичне заняття № 25 – 2 год.

Тема. Найменше та найбільше значення функції на відрізку.

Мета. Сформувати вміння та навички знаходити глобальний мінімум і глобальний максимум функції на відрізку.

Література: [5, с. 195–197] або [4, с. 179–183].

Практичне заняття № 26 – 2 год.

Тема. Умови опуклості та угнутості графіка функції та наявності перегину. Асимптоти графіка функції.

Мета. Виробити вміння та навички знаходити інтервали опуклості та вгнутості функції, а також точки перегину; знаходити асимптоти графіка функції.

Література: [5, с. 197–200, 205, 206] або [4, с. 183–185].

Практичне заняття № 27 – 2 год.

Тема. Загальна схема дослідження функції та побудови графіка.

Мета. Сформувати вміння та навички проводити повне дослідження функції та зображати ескіз її графіка.

Література: [5, с. 200–207] або [4, с. 186, 187].

Практичне заняття № 28 – 2 год.

Тема. Узагальнення вивченого матеріалу. КР № 4 Застосування похідної.

Мета. Систематизувати знання з диференціального числення функцій однієї змінної; провести проміжний контроль основних знань і вмінь з диференціального числення функцій однієї змінної та його застосувань.

Література: [5, с. 171–207] або [4, с. 145–187].

Практичне заняття № 29 – 2 год.

Тема. Загальне рівняння поверхні другого порядку. Зображення і дослідження форми поверхонь методом паралельних перерізів. Циліндричні поверхні: круговий циліндр; еліптичний циліндр; гіперболічний циліндр; параболічний циліндр. Конічні поверхні. Конус другого порядку.

Мета. Засвоїти поняття поверхні другого порядку, вивчити канонічні рівняння еліптичного циліндра, гіперболічного циліндра і параболічного циліндра, а також конусу другого порядку; сформувати вміння досліджувати та зображати зазначені поверхні методом паралельних перерізів.

Література: [5, с. 130, 131, 138] або [4, с. 92–97].

Практичне заняття № 30 – 2 год.

Тема. Поверхні обертання. Сфера. Еліпсоїд. Однопорожнинний гіперболоїд. Двопорожнинний гіперболоїд. Еліптичний параболоїд. Гіперболічний параболоїд.

Мета. Засвоїти канонічні рівняння сфери, еліпсоїда, одно- і двопорожнинного гіперболоїда, еліптичного і гіперболічного параболоїда; сформувати вміння досліджувати та зображати зазначені поверхні методом паралельних перерізів.

Література: [5, с. 132–134, 138] або [4, с. 95–102].

3 ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

3.1 Загальні рекомендації щодо виконання рейтингових індивідуальних завдань

Рейтингові індивідуальні завдання повинні спонукати студента на оволодіння методикою розв’язування практичних задач, набути певних математичних компетенцій, активізувати самостійність і сприяти підвищенню фундаментальної підготовки з математики. При виконанні проміжного рейтингового індивідуального завдання (РІЗ) студенту, перш за все, потрібно повторити відповідний теоретичний матеріал. Для вироблення вмінь і навичок розв'язування задач можна звернутися до розгляду наведених в рекомендованій літературі [1; 2; 5; 7; 9] прикладів розв'язання типових завдань. Проте розв'язування завдань РІЗ вимагає від студента не тільки відповідних теоретичних знань і вміння їх застосовувати, але й творчого підходу. Розв'язування задач у типових випадках повинно виконуватись на рівні навичок – без помилок і впевнено.

При виконанні проміжного рейтингового індивідуального завдання та оформленні письмового звіту студент повинен додержуватись наступних правил:

а) ураховуючи свої індивідуальні особливості та можливості, спрогнозувати реальний час для самостійного виконання даного РІЗ та виробити план-графік своєї роботи;

б) перед розв’язуванням кожної задачі треба привести повністю її умову;

в) проаналізувати умову та можливі шляхи вирішення задачі, вибрати з них найкращий і скласти короткий план розв'язування;

г) подавати розв’язання задач слід ретельно та чітко, у тій же послідовності, в якій вони вказані в РІЗ, строго зберігаючи їх задану нумерацію;

д) помилкові записи не слід стирати і замазувати коректором, а закреслювати кожний такий запис горизонтальною лінією;

е) розв’язання задач повинно супроводжуватись короткими та достатньо повними поясненнями (стислі теоретичні викладки й основні формули) і необхідними графічними ілюстраціями;

є) обчислення потрібно наводити повністю та розташовувати у строгому порядку, відділяючи допоміжні обчислення від основних;

у проміжних обчисленнях не слід використовувати наближені значення;

ж) рисунки можна виконувати від руки, проте акуратно та чітко, із зазначенням одиниць масштабу, координатних осей; позначення в тексті розв’язання повинні відповідати позначенням на рисунках; коли необхідне особливо ретельне зображення, то слід користуватися відповідними креслярськими інструментами чи застосовувати комп’ютерні засоби;

з) розв'язання задачі повинно доводитись до відповіді, що вимагається умовою, і наводитись, по можливості, в загальному вигляді з виведенням результуючої формули, в яку потім підставляють конкретні числові значення; одержані кінцеві результати потрібно виділяти рамкою чи підкреслювати;

и) одержану відповідь треба оцінити, виходячи з фізичного, геометричного чи іншого практичного змісту задачі (наприклад, перевірити розмірність і правдоподібність); розв'язати задачу декількома способами, якщо це можливо, і порівняти отримані результати; при можливості виконати пряму перевірку відповіді;

і) наприкінці звіту про виконане РІЗ слід привести список опрацьованих джерел.

Для закріплення вмінь і навичок слід розв'язати аналогічні задачі з інших варіантів РІЗ.

Звіт за РІЗ підлягає захисту, на якому викладач перевіряє самостійність виконання роботи.

Коли виникають складнощі при виконанні РІЗ, можна звернутися з конкретними запитаннями за консультацією викладача.

Під час екзамену за модуль студент може користуватися своїми звітами за РІЗи.

3.2 Рейтингове індивідуальне завдання № 1 Пряма на площині. Коло

Завдання 1. Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Засобами аналітичної геометрії знайти:

1) рівняння сторони AB та її довжину $|AB|$;

2) рівняння висоти CN та її довжину $|CN|$;

3) рівняння медіани CM;

4) рівняння прямої ET, що проходить через точку перетину E медіан трикутника ABC паралельно стороні AB;

5) тангенс кута φ між висотою CN і медіаною CM;

6) точку перетину S висоти CN і прямої ET.

Зобразити трикутник ABC, знайдені точки і прямі в прямокутній системі координат Oxy.

Номер варіанта	A	B	C	Номер варіанта	A	B	C
1	(-6;-5)	(-4;1)	(5;2)	16	(2;-1)	(4;-7)	(-6;4)
2	(-3;-1)	(-1;9)	(2;6)	17	(5;-3)	(1;-1)	(-3;2)
3	(-1;1)	(1;5)	(4;-3)	18	(4;6)	(2;-2)	(-3;-1)
4	(-2;4)	(2;-6)	(5;2)	19	(3;4)	(-1;-6)	(-4;0)
5	(-1;-6)	(3;2)	(3;-2)	20	(1;-2)	(-3;6)	(0;2)
6	(-2;-7)	(6;-3)	(7;1)	21	(2;-1)	(-2;3)	(-6;1)
7	(-2;1)	(-4;-7)	(3;3)	22	(6;-4)	(2;4)	(-3;1)
8	(1;2)	(3;-6)	(-4;-1)	23	(2;-5)	(-8;-3)	(0;4)
9	(4;5)	(2;-3)	(-3;0)	24	(7;-5)	(-3;-3)	(2;1)
10	(5;-6)	(7;2)	(-8;-3)	25	(4;-5)	(6;1)	(-1;2)
11	(-5;-4)	(-1;4)	(6;-1)	26	(5;3)	(-1;-3)	(-3;4)
12	(-3;2)	(7;4)	(1;-5)	27	(3;1)	(-5;7)	(-3;-3)
13	(-2;-5)	(-6;-3)	(6;1)	28	(1;3)	(-5;7)	(0;-3)
14	(6;2)	(-2;4)	(-4;-5)	29	(-3;3)	(3;-1)	(-1;4)
15	(2;-4)	(-2;2)	(4;-3)	30	(3;7)	(-1;-3)	(-3;2)

Завдання 2. У прямокутній системі координат Oxy лінія другого порядку l визначається вказаною її характеристичною властивістю: для кожної точки $M(x;y)$ лінії l відношення відстаней до заданої точки $M_0(x_0;y_0)$ і до заданої прямої l_0 дорівнює заданому числу e. Знайти загальне рівняння цієї лінії l:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0.$$

Номер варіанта	$M_0(x_0;y_0)$	l_0	e		Номер варіанта	$M_0(x_0;y_0)$	l_0	e
1	(2; 3)	$x=-5$	4		16	(-7; 2)	$x=-1$	3
2	(-2; 4)	$x=4$	1/2		17	(-2; -5)	$x=3$	1/4
3	(4; 3)	$x=6$	2		18	(5; -2)	$y=2$	1/2
4	(2; -3)	$x=-1$	3		19	(-4; 3)	$x=-7$	2
5	(1; -4)	$y=-6$	1/4		20	(3; -7)	$y=-2$	1/2
6	(-2; 4)	$y=3$	2		21	(2; -8)	$x=4$	1/3
7	(6; 1)	$x=-5$	1/3		22	(-6; 5)	$x=5$	1/4
8	(7; 2)	$y=6$	1/3		23	(8; -3)	$y=-1$	4
9	(4; 1)	$y=-4$	3		24	(-4; -8)	$y=-4$	1
10	(2; 3)	$x=-4$	2		25	(2; 3)	$y=-4$	2
11	(5; 6)	$x=-3$	1		26	(-5; -8)	$x=3$	1
12	(-5; 1)	$y=8$	2		27	(6; -7)	$y=1$	1/2
13	(-2; 7)	$y=-6$	1		28	(-3; 7)	$x=-2$	1/4
14	(-3; -5)	$x=8$	1/2		29	(7; -4)	$y=2$	3
15	(-6; -3)	$y=-5$	1/3		30	(4; -7)	$y=2$	2

Завдання 3. У прямокутній системі координат Oxy коло l задане своїм загальним рівнянням вигляду $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$, де відсутній член з добутком координат xy. Необхідно привести задане рівняння кола до

відповідного стандартного вигляду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ і знайти координати центра $C(x_0\,;y_0)$ і радіус R.

Зобразити задане коло l у прямокутній системі координат Oxy.

Номер варіанта	Рівняння кола
1	2
1	$4x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
2	$3x^2+3y^2+2x-6y-1=0$
3	$4x^2+4y^2+6x+12y-11=0$
4	$4x^2+4y^2-6x+16y-11=0$
5	$5x^2+5y^2-20x-3y-5=0$
6	$7x^2+7y^2+28x-14y-4=0$
7	$2x^2+2y^2+14x+5y-6=0$
8	$5x^2+5y^2-30x+10y-1=0$
9	$4x^2+4y^2-3x-36y-6=0$
10	$4x^2+4y^2+24x-10y-3=0$
11	$6x^2+6y^2+6x-8y-5=0$
12	$5x^2+5y^2-25x-10y-1=0$
13	$2x^2+2y^2+16x-3y-6=0$
14	$4x^2+4y^2-2x-16y+3=0$
15	$3x^2+3y^2-18x-4y+4=0$

1	2
16	$5x^2+5y^2-6x+10y-6=0$
17	$3x^2+3y^2-6x-4y-11=0$
18	$2x^2+2y^2-18x+7y-1=0$
19	$4x^2+4y^2-8x-7y-12=0$
20	$3x^2+3y^2-15x+8y-9=0$
21	$6x^2+6y^2-4x+12y+5=0$
22	$5x^2+5y^2+20x-2y-15=0$
23	$4x^2+4y^2+8x-10y-3=0$
24	$3x^2+3y^2-18x-8y-12=0$
25	$2x^2+2y^2-12x+7y-6=0$
26	$7x^2+7y^2+14x+7y-3=0$
27	$4x^2+4y^2-8x+18y-5=0$
28	$5x^2+5y^2+10x-15y-2=0$
29	$3x^2+3y^2-4x-12y+2=0$
30	$2x^2+2y^2-16x-7y+3=0$

Завдання 4. Лінія l задана в декартовій прямокутній системі координат Oxy параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Знайти точки даної лінії, що відповідають значенням параметра t, взятим через інтервал $\pi/8$, починаючи з $t=0$, на проміжку $0 \le t \le 2\pi$.

Заповнити таблицю

t	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$
x										
y										

t	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
x							
y							

Побудувати знайдені точки в декартовій прямокутній системі координат Oxy і одержати зображення заданої кривої l, сполучивши отримані точки суцільною лінією.

Номер варіанта	Рівняння лінії	Номер варіанта	Рівняння лінії
1	2	3	4
1	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = 8\cos^3(t/2) \\ y = 6\sin(t/2) \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = 6\cos(t/2) \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 8\cos(t/2) \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2(1-\sin t) \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 6\sin(t/4) \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 6\sin^5 t \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = 8\cos^3(t/4) \\ y = 2\sin^3(t/2) \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 3(1+\cos t) \end{cases}$

1	2	3	4
6	$\begin{cases} x = \dfrac{8t}{\pi}\sin t \\ y = \dfrac{8t}{\pi}\sqrt[3]{\cos t} \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = \dfrac{4t}{\pi}\sqrt[3]{\cos t} \\ y = \dfrac{8t}{\pi}\sin t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = 12\cos(t/2) \\ y = 2\sin 2t \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 4\sin(t/2) \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 3(1+\cos t) \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = 1+4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = 8\cos^5 t \\ y = 4\sin t \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = 8\cos^3(t/2) \\ y = 4\sin(t/2) \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 4\sin t \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = 8\cos^3(t/2) \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$
12	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sqrt[3]{\sin t} \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3(t/2) \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2(1+\sin t) \end{cases}$
14	$\begin{cases} x = 6\cos(t/2) \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = 4\sqrt[3]{\cos t} \\ y = 2\sin t \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = 8\cos(t/2) \\ y = 6\sin^3(t/2) \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = t+\sin t \\ y = 3(1-\cos t) \end{cases}$

3.3 Рейтингове індивідуальне завдання № 2 Матриці. Визначники. Системи рівнянь

Завдання 1. Для даного визначника Δ і вказаних чисел i та j знайти мінори M_{ij}, M_{ji} і алгебраїчні доповнення A_{ij}, A_{ji} відповідно елементів a_{ij} і a_{ji}. Обчислити визначник Δ трьома способами:

1) розкладаючи його за елементами i-го рядка;

2) розкладаючи його за елементами j-го стовпця;

3) попередньо отримавши нулі в j-му стовпці у всіх чарунках, окрім довільно обраної однієї, а потім розкладаючи його за елементами j-го стовпця.

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	2	3	4
1	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=4$	16	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=1$
2	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=4$	17	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=4$

1	2	3	4
3	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=3$	18	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=3$
4	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=3$	19	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=3$
5	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=2$	20	$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=1$
6	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=4$	21	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=1$
7	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=2$	22	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=3$

1	2	3	4
8	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=4$	23	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=4$
9	$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=4$	24	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=1$
10	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=1$	25	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=2$
11	$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=4$	26	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=3$
12	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=3$	27	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=2$

1	2	3	4
13	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=3$	28	$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=2$
14	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=2$	29	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=4$
15	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=4$	30	$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=3$

Завдання 2. Дано матриці A і B.

а) Знайти матриці: $C = 2A + 3B^T$, $D = AB - BA$.

б) Знайти обернену матрицю A^{-1} та перевірити, що $AA^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$.

в) Записати квадратну матрицю G другого порядку (розміру 2×2), яка одержується з A (розміру 3×3) вилученням останнього рядка і останнього стовпця. Побудувати характеристичний многочлен матриці G: $f(\lambda) = \det(G - \lambda E)$. Знайти власні числа λ_1 і λ_2 квадратної матриці G як корені характеристичного рівняння: $\det(G - \lambda E) = 0$.

г) Перевірити, що матриця G також є коренем свого характеристичного многочлена: $f(G) = 0$.

Номер варіанта	A і B
1	2
1	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 6 & -1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 5 & -2 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 5 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ 5 & 1 & -2\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 4 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ -3 & 1 & 4\\ 5 & 0 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -4\\ -2 & 5 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

1	2
9	$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 4 & -1 & -3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -3 & 2\\ -6 & -2 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$
12	$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$
14	$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\\ 3 & -4 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -2\\ -3 & 1 & 0\\ -2 & 2 & -3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & -2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$
16	$A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$

1	2
17	$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 8\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$
18	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 1 & -5 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
20	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -3 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 4 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}$
22	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ -3 & 0 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 6 & -1\\ 7 & 0 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$
24	$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 4 & -3 & 5\\ 7 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$

1	2
25	$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & -2 & 5\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$
26	$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ -3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$
28	$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$
30	$A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Завдання 3. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами:

а) методом Крамера;

б) за допомогою оберненої матриці;

в) методом Гаусса послідовного вилучення невідомих.

Зробити перевірку.

Номер варіанта	Система	Номер варіанта	Система
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 5x+y-2z=4 \\ 5x+8y+4z=12 \\ -2x+4y-3z=11 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 3x+4y+z=1, \\ 5x+y-3z=-2, \\ 2x+3y+4z=7. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x+2y+2z=2, \\ x-2y+z=4, \\ 2x-y+z=3. \end{cases}$	17	$\begin{cases} 3x+5y-7z=-1 \\ -x+6y+2z=0 \\ 5x-y+4z=14 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 7x-2y-z=5 \\ x+4y+z=3 \\ -4x+5y+6z=8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ 3x-y+5z=2, \\ 4x+3y+4z=0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x-y+z=5, \\ 3x+2y-2z=-3, \\ 4x+5y-3z=-5. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 3x-2y-z=-1 \\ x+4y+3z=-1 \\ 4x-y-2z=4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -3x+5y+8z=2 \\ -x-4y+2z=0 \\ 5x-y-9z=1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} -3x+2y+z=2 \\ 5x+y-4z=-5 \\ x+4y-3z=-4 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x+2y+4z=-3, \\ 2x+3y+3z=-5, \\ 5x-4y+2z=5. \end{cases}$	21	$\begin{cases} -3x+2y+z=-3 \\ -x-3y+2z=4 \\ x+2y-4z=-10 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 6x+5y-z=-13 \\ x+4y+5z=5 \\ 2x+8y+z=-8 \end{cases}$	22	$\begin{cases} -3x+2y-z=8 \\ 3x-3y+2z=-15 \\ -5x+2y+4z=-9 \end{cases}$

1	2	3	4
8	$\begin{cases} 4x+2y-z=1 \\ x-3y+2z=0 \\ -5x+2y-4z=-8 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 3x-3y+5z=-9, \\ 4x+2y-3z=0, \\ x+3y+4z=5. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ x-2y+2z=-1 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x+5y-z=-9 \\ -2x-y+4z=2 \\ 2x+4y+3z=-1 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x+y+2z=5 \\ 3x+2y+3z=8 \\ -2x+3y+6z=7 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-2y+4z=11 \\ -2x-2y-z=-9 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 4x+y-z=3, \\ 5x+\quad 4z=-4, \\ -2x+3y+5z=1 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x+2y-3z=-1, \\ 2x+3y+2z=9, \\ 5x-4y+4z=9. \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x+y-7z=10 \\ -x+3y+2z=-3 \\ 2x-y+4z=-2 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x+5y-z=3 \\ x+5y-3z=14 \\ -3x+4y+z=-2 \end{cases}$
13	$\begin{cases} -3x+5y+8z=2 \\ -x+6y+3z=1 \\ 5x-y-6z=4 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x+5y-z=1 \\ -2x+5y+2z=2 \\ -3x+4y+z=-3 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x-y+2z=9, \\ x+y-z=-2, \\ 4x+4y-3z=-5. \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ 3x+3y-4z=-6 \\ -2x+4y-z=5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 6x-2y-z=3 \\ x+4y-3z=-8 \\ 3x+10y-2z=-3 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x+5y-z=5 \\ x+y+2z=0 \\ -3x+4y+7z=-13 \end{cases}$

Завдання 4. Перевірити, що дана квадратна однорідна система $AX = 0$ має безліч розв'язків ($\det A = 0$). Знайти всі ці розв'язки (загальний розв'язок). Знайти будь-який ненульовий частинний розв'язок.

Номер варіанта	Система	Номер варіанта	Система
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 5x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \\ 5x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 5x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 3x + 2y - 8z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \\ x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 10y - 7z = 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x - 6y + 5z = 0 \\ 4x - 4y - 3z = 0 \\ 2x - 8y + 13z = 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x + 5y - 8z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + y - 2z = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x + y - 7z = 0 \\ 3x - 4y - 4z = 0 \\ x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x + 2y + 7z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ -x + 8y + z = 0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ 5x + \quad 3z = 0 \\ 4x - y + 7z = 0 \end{cases}$

1	2	3	4
7	$\begin{cases} 3x+5y-z=0 \\ x+4y-6z=0 \\ x-3y+11z=0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 3x-4y-z=0 \\ -x+3y+2z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x+2y-5z=0 \\ 2x-3y+3z=0 \\ 2x+5y-8z=0 \end{cases}$	23	$\begin{cases} -3x+5y+4z=0 \\ x+y-2z=0 \\ x+9y-4z=0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4x+y-6z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ x+10y-12z=0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x-y+5z=0 \\ x+3y-z=0 \\ x-7y+7z=0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x-7y+2z=0 \\ 3x+5y-3z=0 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 6x-2y-3z=0 \\ x+4y-3z=0 \\ 4x-10y+3z=0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x-4y+z=0 \\ 5x+y-3z=0 \\ 2x+5y-4z=0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x+2y-6z=0 \\ 2x-4y+3z=0 \\ -x+10y-12z=0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x+5y-z=0 \\ -x-6y+2z=0 \\ x-7y+3z=0 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x+5y-6z=0 \\ 4x-3y-3z=0 \\ -2x+8y-3z=0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x-4y+5z=0 \\ 3x-y-3z=0 \\ -x-3y+8z=0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x+5y-4z=0 \\ -2x+6y+z=0 \\ 4x-y-5z=0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 7x-2y-2z=0 \\ 3x+4y-3z=0 \\ x-10y+4z=0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x+y-7z=0 \\ 3x-3y+4z=0 \\ 5x-2y-3z=0 \end{cases}$

1	2	3	4
15	$\begin{cases} 3x-2y+5z=0 \\ 5x+y-4z=0 \\ 2x+3y-9z=0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x-y-8z=0 \\ x-3y+6z=0 \\ 3x-4y-2z=0 \end{cases}$

3.4 Рейтингове індивідуальне завдання № 3 Вектори. Пряма і площина у просторі

Завдання 1. Дано вершини трикутної піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Побудувати зображення піраміди $A_1A_2A_3A_4$ у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$. Засобами векторної алгебри та аналітичної геометрії знайти:

а) довжину ребра A_1A_2; б) кут φ між ребрами A_1A_2 і A_1A_4; в) проекцію $np_{\overrightarrow{A_1A_2}}\overrightarrow{A_1A_4}$ вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$; г) площу грані $A_1A_2A_3$; д) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; е) координати d_1, d_2, d_3 радіус-вектора $\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ у базисі $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, що утворений векторами $\vec{e_1}=\overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{e_2}=\overrightarrow{A_1A_3}$, $\vec{e_3}=\overrightarrow{A_1A_4}$: $\vec{d}=d_1\cdot\vec{e_1}+d_2\cdot\vec{e_2}+d_3\cdot\vec{e_3}$; є) загальне рівняння площини $A_1A_2A_3$; ж) канонічні рівняння прямих A_1A_2 і A_3A_4; з) кут ϕ між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$; и) канонічні рівняння висоти піраміди A_4N, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$; і) канонічні рівняння прямої A_3M, яка паралельна ребру A_1A_2; ї) рівняння площини α, яка проходить через точку A_1 перпендикулярно ребру A_1A_2; й) довжину висоти A_4N, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$; к) канонічні рівняння медіани A_1K трикутника $A_1A_2A_3$; л) координати точки N – основи висоти A_4N, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$; м) відстань між паралельними прямими A_3M і A_1A_2; н) відстань між мимобіжними прямими A_1A_2 і A_3A_4; о) загальні рівняння прямої l, що служить лінією перетину грані $A_1A_2A_3$ і площини $\beta: x+y+z-1=0$; перейти від загальних рівнянь прямої l до канонічних, а потім до параметричних рівнянь.

Номер варіанта	Вершини трикутної піраміди
1	2
1	$A_1(-4, 2, 1),\ A_2(-1, 5, 4),\ A_3(-2, -4, 5),\ A_4(1, 2, -7)$
2	$A_1(1, -5, 1),\ A_2(-1, 3, 4),\ A_3(0, -6, 1),\ A_4(1, 2, -8)$
3	$A_1(-4, 2, 0),\ A_2(3, 1, -5),\ A_3(-2, 4, 6),\ A_4(1, -3, -3)$
4	$A_1(7, 0, 1),\ A_2(3, 1, 0),\ A_3(-2, 4, 6),\ A_4(1, 5, -3)$
5	$A_1(-6, 1, 4),\ A_2(-1, 0, -4),\ A_3(1, 5, 2),\ A_4(1, 2, -2)$
6	$A_1(0, -1, 3),\ A_2(-2, 2, 5),\ A_3(5, -6, 1),\ A_4(3, 0, 4)$
7	$A_1(-4, 4, -3),\ A_2(-1, 0, 2),\ A_3(2, 1, -4),\ A_4(1, 2, -5)$
8	$A_1(-1, 3, 7),\ A_2(0, -2, 4),\ A_3(3, 2, -1),\ A_4(4, -1, 2)$
9	$A_1(0, 1, -3),\ A_2(3, -5, -3),\ A_3(3, 1, -5),\ A_4(4, 2, -1)$
10	$A_1(4, 0, 1),\ A_2(-1, 5, 4),\ A_3(-2, -3, 8),\ A_4(1, 2, -7)$
11	$A_1(6, 0, -2),\ A_2(-1, 3, 7),\ A_3(-3, 1, -5),\ A_4(1, 2, -1)$
12	$A_1(-4, 1, 2),\ A_2(4, -2, 0),\ A_3(0, -2, -6),\ A_4(1, -3, 1)$
13	$A_1(5, -3, 7),\ A_2(3, -2, 6),\ A_3(0, -5, -4),\ A_4(-1, 1, 4)$
14	$A_1(0, -7, 1),\ A_2(-4, 0, 2),\ A_3(-3, 1, 3),\ A_4(-1, 2, -3)$
15	$A_1(1, 0, 5),\ A_2(-1, 4, -4),\ A_3(0, -2, 1),\ A_4(3, 2, -5)$
16	$A_1(-3, 0, 1),\ A_2(1, -4, 0),\ A_3(0, -5, 1),\ A_4(-5, 1, -2)$
17	$A_1(1, 6, -2),\ A_2(-1, 3, 4),\ A_3(3, -6, 2),\ A_4(1, 2, -3)$
18	$A_1(-6, 0, 1),\ A_2(1, -4, 0),\ A_3(0, -5, 1),\ A_4(-1, 1, -5)$
19	$A_1(3, -1, -6),\ A_2(-4, 3, 4),\ A_3(1, 0, -2),\ A_4(1, 2, 0)$
20	$A_1(3, 1, 4),\ A_2(-1, -3, 4),\ A_3(1, 0, 2),\ A_4(1, 2, -7)$
21	$A_1(6, -2, 3),\ A_2(-1, 0, -5),\ A_3(5, 3, -1),\ A_4(3, 4, -4)$
22	$A_1(-3, 2, -3),\ A_2(-1, 3, 2),\ A_3(5, 1, -2),\ A_4(1, 2, -7)$

1	2
23	$A_1(-4,3,6),\ A_2(-3,-2,4),\ A_3(3,4,-1),\ A_4(4,-2,2)$
24	$A_1(5,1,-3),\ A_2(3,-4,-3),\ A_3(3,1,2),\ A_4(1,2,-7)$
25	$A_1(4,-3,1),\ A_2(-1,3,-4),\ A_3(2,-3,-2),\ A_4(1,2,0)$
26	$A_1(0,-6,1),\ A_2(-1,4,5),\ A_3(-2,-3,4),\ A_4(1,0,-3)$
27	$A_1(-4,0,1),\ A_2(4,-2,6),\ A_3(0,-5,1),\ A_4(1,3,-3)$
28	$A_1(-4,-1,0),\ A_2(5,1,2),\ A_3(-3,5,-4),\ A_4(-1,2,4)$
29	$A_1(7,-6,0),\ A_2(-1,4,-2),\ A_3(5,0,-4),\ A_4(3,-4,1)$
30	$A_1(1,6,-3),\ A_2(-3,3,-5),\ A_3(3,0,2),\ A_4(0,2,2)$

3.5 Рейтингове індивідуальне завдання № 4 Похідна та її застосування

Завдання 1. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка l заданої функції у відповідній точці $M_0(x_0;y_0)$. Зобразити дотичну та нормаль у декартовій прямокутній системі координат Oxy.

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	2	3	4
1	$y=(2x-3)^{x-1};\ x_0=2$	16	$y=(x-1)^{x^2};\quad x_0=2$
2	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{150}=1;$ $M_0(-7;12)$	17	$\sin(x-y)+x^2-2y=0;$ $M_0(2;2)$
3	$y=\frac{(2-x)^5(x+1)^2}{\sqrt[3]{(9-x)^2}};$ $x_0=1$	18	$y=\frac{(3x-1)^2}{(x+1)\sqrt[3]{(2-x)^4}};\ x_0=1$

1	2	3	4
4	$y=\left(2-x^2\right)^{x+1}$; $x_0=1$	19	$\sin(y+1)+y-x+1=0$; $M_0(0;-1)$
5	$\begin{cases} x=\pi^2 t\cos t-1 \\ y=\dfrac{2}{\pi}t\sin t \end{cases}$; $t_0=\pi/2$	20	$\begin{cases} x=\sqrt{2}(\cos t+t\sin t)-\dfrac{\pi}{4} \\ y=-\sqrt{2}(\sin t-t\cos t)-\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$; $t_0=\pi/4$
6	$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin 2t-2 \end{cases}$; $t_0=0$	21	$\cos(x-y)+y^2-x=0$; $M_0(1;1)$
7	$y=(3-x)^x$; $x_0=2$	22	$\cos y+x^3-4y-2=0$; $M_0(1;0)$
8	$\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{16}=1$; $M_0(10;-3)$	23	$e^{2y}-\sin xy-x+y=0$; $M_0(1;0)$
9	$\dfrac{x^2}{25}+y^2=1$; $M_0(4;-3/5)$	24	$\cos xy+3y-x+2=0$; $M_0(0;-1)$
10	$x^2+y^2=25$; $M_0(-4;3)$	25	$\arcsin y+3y-x+2=0$; $M_0(2;0)$
11	$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$; $M_0(-8;3)$	26	$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{1}=1$; $M_0(5;-3/4)$

1	2	3	4
12	$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1;$ $M_0(-10;-3)$	27	$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{4}=1;\quad M_0(8;-6/5)$
13	$\begin{cases} x=t-\sin t-\pi \\ y=2-\cos(t/2) \end{cases};$ $t_0=\pi$	28	$\begin{cases} x=2+\ln(1+t^2)-\ln 2 \\ y=1+4\,arctg\,t-\pi \end{cases};$ $t_0=1$
14	$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=4\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases};$ $t_0=\pi/4$	29	$\begin{cases} x=2\sqrt{3(1-t^2)} \\ y=6\arcsin t-\pi \end{cases};\quad t_0=1/2$
15	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1;$ $M_0(-5;-3/2)$	30	$\ln(xy+1)+y-2=0;$ $M_0(0;2)$

Завдання 2. Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаній умові.

Номер варіанта	Функція та рівняння	Номер варіанта	Функція та рівняння
1	2	3	4
1	$y=\frac{\ln^2 x}{x};$ $x^2y'+xy-2\ln x=0$	16	$y=\frac{e^{-2x}}{x^2};\quad xy'+2(x+1)y=0$
2	$y=-3\sin 2x+2x;$ $y''+4y-8x=0$	17	$y=e^{\sin x};$ $y''-y'\cos x+y\sin x=0$

1	2	3	4
3	$y = x\,arctg\,x$; $x^4 y'' - 2(xy' - y)^2 = 0$	18	$y = \sin^2 x$; $2y\,y'' - (y')^2 + 4y^2 = 0$
4	$y = \dfrac{tg\,x}{x}$; $xy' + y - \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0$	19	$y = ctg^2 x$; $y''\cos^4 x - (y')^2 \sin^2 x \times$ $\times \cos^4 x - 2y^2 = 0$
5	$y = -\dfrac{x}{4\ln x}$; $y' = \dfrac{yx + 4y^2}{x^2}$	20	$y = (1 + x^2)\,arctg\,x$; $xy'' - y' - \dfrac{x^2 - 1}{1 + x^2} = 0$
6	$y = x/(x+1)$; $xy'' + 2y\,y' = 0$	21	$y = x\,e^{1/x}$; $x^4 y'' - y = 0$
7	$y = \dfrac{x}{\ln x}$; $x^4 y'' + xy^2 - 2y^3 = 0$	22	$y = x\sqrt{6\ln x}$; $y' = \dfrac{y^2 + 3x^2}{xy}$
8	$y = e^{x^2/2}$; $y\,y'' - (y')^2 - e^{x^2} = 0$	23	$y = x\cos x$; $y'' + y + 2\sin x = 0$
9	$y = \cos(1/x)$; $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 0$	24	$y = \sqrt{\cos x}$; $4y^3 y'' + 2y^4 + \sin^2 x = 0$
10	$y = 3e^{-2x} - 4$; $y'' = (y')^2/(4 + y)$	25	$y = x\,e^{-x}$; $y'' - y + 2\,e^{-x} = 0$
11	$y = tg\,x$; $y'' = 2yy'$	26	$y = e^{\sqrt{x}}$; $4x\,y'' + 2y' - y = 0$

1	2	3	4
12	$y=tg(x/2)$; $(y^2-2y')y''+y\,y'=0$	27	$y=\sqrt{\ln x}/x^2$; $2x^5y\,y'+4x^4y^2=1$
13	$y=x\,e^{-x^2}$; $y''+6y-4x^3e^{-x^2}=0$	28	$y=\dfrac{x^2}{\sin x}$; $xy'-y(2-x\,ctg\,x)=0$
14	$y=x^3\ln x$; $x^2y''-6y-5x^3=0$	29	$y=x^2\sin x$; $x^2y''-4xy'+(x^2+6)y=0$
15	$y=x^2/2-4/x+3$; $y''+2y'/x=3$	30	$y=x\sin x$; $y''+y-2\cos x=0$

Завдання 3. Застосовуючи правило Лопіталя та інші прийоми, знайти вказані границі.

Номер варіанта	а)	б)
1	2	3
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x+tg5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{3/x}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{tg\,x+3x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}x(\ln(x+2)-\ln x)$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x}{x+\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg\,3x+arctg\,x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(x+\cos x)^{1/x}$

1	2	3
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg\,2x+x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2arctg\,x}{\ln(1+1/x)}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x+tg\,5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{1/x^2}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg5x}{\arcsin 3x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)^{x}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-tg\,4x}{\arcsin 5x}$	$\lim\limits_{x\to 1}(x+\ln x)^{1/\ln x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin 3x-x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^{1/\ln 2x}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 6x}{arctg\,3x-x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{\arcsin 2x+8x}$	$\lim\limits_{x\to+0}(\ln(4x+1))^{1/\ln x}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x^2+x}{\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{x}-1\right)^{2/\ln x}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}(ctg\,x\cdot\arcsin 3x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+4x)^{1/\ln x}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x\cdot\sin 3x}{1-\cos 2x}$	$\lim\limits_{x\to+0}(\sin 2x)^{1/\ln tg\,x}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\arcsin^2 4x}{\cos x-\cos 5x}$	$\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln\sin x}}$
16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tg\,x-2\sin x}$	$\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{x}-1\right)^{1/\ln x}$

1	2	3
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\sin 2x}{arctg5x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(ctg\,x)^{tg\,x}$
18	$\lim\limits_{x\to 0}(ctg\,x\cdot arctg2x)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg\,x}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x-\sin 4x}$	$\lim\limits_{x\to \pi/4+0}(tg2x)^{1/\ln(4x-\pi)}$
20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+2x)^{1/x}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tg\,x-2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{2/x}$
22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x^2}{8x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{2/\ln\cos x}$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x-\arcsin 4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{4/tg\,x}$
24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg2x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}(1+e^x)^x$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{8x-\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(\sin x+x)^{1/\ln x}$
26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x^2}{x-\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(tg2x)^{1/\ln x}$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2+x}{x-tg6x}$	$\lim\limits_{x\to 1+0}(e^{2x}-e^2)^{1/\ln(x-1)}$

1	2	3
28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2-1}{tg\,x-\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln(e+x)\right)^{1/x}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx^2-2x}{\sin 6x}$	$\lim\limits_{x\to 1+0}\left(e^x-e\right)^{2/\ln(x-1)}$
30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+arctg\,x^2}{tg\,x-\sin 6x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(tg\,2x)^{1/\ln\sin x}$

Завдання 4. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції на вказаному відрізку:
Примітка: Відповідь подати з точністю до двох значущих знаків.

Номер варіанта	Функція та відрізок
1	2
1	$y=x^2+16/x-12$,[1,4]
2	$y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, [–1,0]
3	$y=2\sqrt{x}-x+4$,[0,4]
4	$y=x-4\sqrt{x}+2$,[1,9]
5	$y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$, [1,2]
6	$y=5-x-4/(x+2)^2$,[–1,2]
7	$y=\dfrac{-x^2+7x-7}{x^2-2x+2}$,[1,4]
8	$y=(1+\ln x)/x$, $[e^{-2};e]$
9	$y=-x^2/2+8/x+10$,[–4,–1]

1	2
10	$y=-\dfrac{x(2x+3)}{x^2+4x+5}$,[–2,1]
11	$y=(x^5-8)\big/x^4$, [–4,–1]
12	$y=2\sqrt{x-1}-x+2$,[1,5]
13	$y=-x^2/2+2x+8/(x-2)+3$,[–2,1]
14	$y=x^3\,e^{x+1}$, [–4,0]
15	$y=4/x^2-8x-11$,[–2,–1/2]
16	$y=6-x-4/x^2$,[1,4]
17	$y=\dfrac{4(x^2+3)}{x^2-2x+5}$,[–3,2]
18	$y=x-4\sqrt{x+2}+9$,[–1,7]
19	$y=10x/(1+x^2)+3$,[0,3]
20	$y=2x^2+108/x-60$,[2,4]
21	$y=(x-2)e^x$, [–2,1]
22	$y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$, [–1,2]
23	$y=2-4x/(4+x^2)$,[–4,2]
24	$y=e^{6x-x^2}$, [–1,4]
25	$y=-\dfrac{4(x^2+3)}{x^2+2x+5}$,[–5,1]
26	$y=x^2-2x+16/(x-1)-12$,[2,5]
27	$y=x\ln x$, $[e^{-2};1]$
28	$y=8x+4/x^2-17$,[1/2,2]
29	$y=x^2+4x+16/(x+2)-10$,[–1,2]
30	$y=x^5-5x^4+5x^3-3$, [–2,2]

Завдання 5. Дослідити задану функцію засобами диференціального числення, знайти асимптоти та побудувати графік.

Номер варіанта	Функція	Номер варіанта	Функція
1	2	3	4
1	$y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$	16	$y=\dfrac{x}{x^2-1}$
2	$y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$	17	$y=\dfrac{1}{x}+4x^2$
3	$y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$	18	$y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$
4	$y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$	19	$y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$
5	$y=\dfrac{x^2}{2(x-2)}$	20	$y=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$
6	$y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$	21	$y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$
7	$y=\dfrac{4(x-1)^2}{x^2}$	22	$y=\dfrac{4x}{(x-3)^2}$
8	$y=\dfrac{8x}{(x-2)^2}$	23	$y=\dfrac{6x^2}{(x-1)^2}$
9	$y=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$	24	$y=\dfrac{1}{x}+4x^2$

1	2	3	4
10	$y=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$	25	$y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$
11	$y=\dfrac{x^4}{(1+x)^4}$	26	$y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$
12	$y=\dfrac{x^4}{2(x-1)^3}$	27	$y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$
13	$y=\dfrac{x-3}{(x-2)^2}$	28	$y=\dfrac{2x+6}{(x+2)^2}$
14	$y=\dfrac{(x-1)^3}{x^2}$	29	$y=\dfrac{4(x-2)}{(x-1)^2}$
15	$y=\dfrac{2x+3}{(x+1)^2}$	30	$y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

4 ЗРАЗКИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

4.1 Задачі до змістового модуля 1.1 Аналітична геометрія на площині. Вступ до аналізу. Лінійна алгебра

Приклад 1. Знайти довжину бісектриси AE трикутника ABC, якщо $A(-2;0)$, $B(6;6)$ і $C(1;-4)$.

□ Використовуючи властивість бісектриси, знайдемо відношення λ, у якому точка E поділяє сторону BC:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ ;$$

$$AB=\sqrt{(6+2)^2+(6-0)^2}=10\,;\quad AC=\sqrt{(1+2)^2+(-4-0)^2}=5\,;$$

$$\lambda = \frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB} = \frac{10}{5} = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо координати точки $E(x, y)$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};$$

$$x = \frac{1+3}{1+1/2} = \frac{8}{3}; \; y = \frac{-4+3}{1+1/2} = \frac{2}{3}; \; E\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Отже, $$AE = \sqrt{\left(\frac{8}{3}+2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$ ■

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M(2,-4)$ і $N(3,5)$.

□ Тут $x_1 = 2$, $y_1 = -4$, $x_2 = 3$, $y_2 = 2$, тоді

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}; \quad \frac{y-(-4)}{5-(-4)} = \frac{x-2}{3-2}; \frac{y+4}{9} = \frac{x-2}{1};$$

$$y + 4 = 9x - 18; \; y = 9x - 22.$$ ■

<u>*Приклад 3*</u>. Знайти відстань від точки M(-1, 5) до прямої $3x - 4y + 13 = 0$.

□ $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}; \; d = \frac{|3\cdot(-1) - 4\cdot 5 + 13|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$ ■

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M(3, 1) перпендикулярно до прямої $4x + 5y - 10 = 0$.

□ Нехай k_1 – кутовий коефіцієнт даної прямої, k_2 – шуканої. Тоді:

$$k_1 k_2 = -1; \quad k_1 = -\frac{4}{5}, \quad k_2 = \frac{-1}{-4/5} = \frac{5}{4}.$$

Рівняння шуканої прямої має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Тоді $y-1=\frac{5}{4}(x-3)$; $4y-4=5x-15$; $5x-4y-11=0$. ■

Приклад 5. Знайти центр кола і його радіус, якщо

$$x^2+y^2+6x-9y+7=0$$

□ Згрупуємо відносно x і y, а тоді виділимо повні квадрати

$$(x^2+6x)+(y^2-9y)+17=0;$$

$$(x^2+2\cdot 3x+9-9)+(y^2-2\cdot(9/2)y+81/4-81/4)+17=0;$$

$$(x+3)^2+(y-9/2)^2-9-81/4+17=0;$$

$$(x+3)^2+(y-9/2)^2=49/4.$$

Порівнюючи зі стандартним поданням кола

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

маємо: центр кола в точці $M_0(-3,9/2)$, а радіус $R=\sqrt{49/4}=7/2$. ■

Приклад 6. Дійсна піввісь гіперболи дорівнює 5, ексцентриситет $e=1,8$. Знайти канонічне рівняння гіперболи.

□ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Тут a=5 і e=1,8., $a^2=25$. $e=\frac{c}{a}$. Отже,

$\frac{c}{5}=1{,}8$; $c=9$, $c^2=81$. Тоді $b^2=c^2-a^2=81-25=56$.

Тому шукане рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{56}=1$. ■

Приклад 7. Парабола $y^2=2px$ проходить через точку $M(2,-6)$. Знайти параметр p.

□ Підставимо у рівняння параболи $y^2=2px$ координати точки M: $36=4p$; $p=9$. ■

Приклад 8. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+12}{x^3+8x^2+14x-5}$.

□ $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+12}{x^3+8x^2+14x-5}=\left|\dfrac{25-40+12}{-125+200-70-5}=\dfrac{-3}{0}\right|=\infty$. ■

Приклад 9. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3x^2-19x+28}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-3x^2-x+10}{x^3+6x^2+5x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-13x^2+16x-4}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3x^2-19x+28}=\dfrac{16-16}{48-76+28}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

Розділимо чисельник і знаменник на $x-4$:

$x^2-16=(x-4)(x+4)$; $3x^2-19x+28=(x-4)(3x-7)$;

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(3x-7)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{3x-7}=\frac{4+4}{12-7}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5};$$

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-3x^2-x+10}{x^3+6x^2+5x-6}=\dfrac{16-16-12+2+10}{-8+24-10-6}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$x^4+2x^3-3x^2-x+10=(x+2)(x^3-3x+5);$$

$$x^3+6x^2+5x-6=(x+2)(x^2+4x-3);$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^3-3x+5)}{(x+2)(x^2+4x-3)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x+5}{x^2+4x-3}=\frac{-8+6+5}{4-8-3}=\frac{3}{7};$$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3-1}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)(x+3/2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}=\dfrac{5}{3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-13x^2+16x-4}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)(3x^2-7x+2)}=$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{3x^2-7x+2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(3x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{3x-1}=\frac{3}{5}.\ \blacksquare$$

Приклад 10. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-9x^2+6x}{7x^3-4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5+3x^2-2x+1}{6x^3-9x^2-7x+2}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-9x^2+6x}{7x^3-4x+2}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

Найвищий степінь x дорівнює 3, тому розділимо кожен елемент чисельника і знаменника дробу на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{9x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{9}{x}+\frac{6}{x^2}}{7-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{7-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}=$$

$=\dfrac{2}{7}$, де $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}=0$ – за властивостями нескінченно великих величин;

б) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+3x^2-2x+1}{6x^3-9x^2-7x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^5}{x^5}+\frac{3x^2}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6x^3}{x^5}-\frac{9x^2}{x^5}-\frac{7x}{x^5}+\frac{2}{x^5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6}{x^2}-\frac{9}{x^3}-\frac{7}{x^4}+\frac{2}{x^5}}=\left|\frac{3+0-0+0}{0-0-0+0}=\frac{3}{0}\right|=\infty.\ \blacksquare$$

Приклад 11. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$.

□ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}=\dfrac{\sqrt{3+6}-3}{27-27}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

Спряженим до виразу $\sqrt{x+6}-3$ є $\sqrt{x+6}+3$, тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз:

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(x^3-27\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9}{\left(x^3-27\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{162}.\quad \blacksquare$$

Приклад 12. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{\operatorname{arctg} 7x}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 5x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 3x}{\sin^2 5x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x\cdot 25x^2\cdot 9x^2}{\sin^2 5x\cdot 25x^2\cdot 9x^2}=$

$$=\frac{2\cdot 9}{25}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{9x^2}:\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{25x^2}=\frac{18}{25}\cdot 1^2:1^2=\frac{18}{25};$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{\operatorname{arctg} 7x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x\cdot 7\cdot 6\cdot x}{\operatorname{arctg} 7x\cdot 7\cdot 6\cdot x}=$

$$=\frac{6}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 6x}{6x}:\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 7x}{7x}=\frac{6}{7}\cdot 1:1=\frac{6}{7}.\quad \blacksquare$$

Приклад 13. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-10}{1+3x}\right)^{5x-2}$.

□ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-10}{1+3x}\right)^{5x-2}=\left|1^\infty\right|=$

До основи показниково-степеневої функції додамо та віднімемо одиницю:

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-10}{1+3x}-1\right)^{5x-2} =$$

Приведемо до єдиного знаменника другий та третій елементи основи (спростимо нескінченно малу величину):

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-10-1-3x}{1+3x}\right)^{5x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-11}{1+3x}\right)^{5x-2} =$$

Помножимо показник степеня на величину, обернену до спрощеної нескінченно малої («перевернутий дріб»), що додається до одиниці у основі функції, а потім «для компенсації» на саму нескінченно малу, виділимо другу чудову границю і скористаємося її значенням:

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-11}{1+3x}\right)^{(5x-2)\cdot\frac{1+3x}{-11}\cdot\frac{-11}{1+3x}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{1+3x}\right)^{\frac{1+3x}{-11}}\right]^{-11\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-2}{1+3x}} = e^{-11\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-2/x}{1/x+3}} = e^{-55/3}. \quad \blacksquare$$

Приклад 14. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} -1, \ \text{якщо } x < -2; \\ 4x/(x+1), \ \text{якщо } -2 \le x < 1; \\ 3-x, \ \text{якщо } x \ge 1. \end{cases}$$

□ Оскільки функція задана різними формулами на різних проміжках, на кожному з яких вона, як елементарна, є неперервною всюди, де визначена, то розрив можливий лише в точці $x_1 = -1$, де функція невизначена (ділення на нуль), а також у точках $x_2 = -2$ і $x_3 = 1$, де змінюється аналітичний вираз її подання.

Досліджуємо функцію в цих точках.

При $x_1 = -1$ маємо:

$$y(-1) = 4x/(x+1)\big|_{x=-1} = \left|4\cdot(-1)/(-1+1) = -4/0\right| = \infty \text{ – не існує;}$$

$$\lim_{x\to -1-0} y = \lim_{x\to -1-0} \frac{4x}{x+1} = \left| \frac{4\cdot(-1-0)}{-1-0+1} = \frac{-4}{-0} \right| = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0} y = \lim_{x\to -1+0} \frac{4x}{x+1} = \left| \frac{4\cdot(-1+0)}{-1+0+1} = \frac{-4}{+0} \right| = -\infty.$$

Оскільки обидві односторонні границі існують і нескінченні, то $x_1 = -1$ – точка нескінченного стрибка.

При $x_2 = -2$ маємо:

$$y(-2) = 4x/(x+1)\big|_{x=-2} = 4\cdot(-2)/(-2+1) = 8;$$

$$\lim_{x\to -2-0} y = \lim_{x\to -2-0} (-1) = -1;$$

$$\lim_{x\to -2+0} y = \lim_{x\to -2+0} \frac{4x}{x+1} = \frac{4\cdot(-2+0)}{-2+0+1} = \frac{-8}{-1} = 8.$$

Оскільки обидві односторонні границі існують, скінченні та різні, то $x_2 = -2$ – точка скінченного стрибка висотою $h = 8-(-1) = 9$.

При $x_3 = 1$ маємо: $y(1) = (3-x)\big|_{x=1} = 3-1 = 2$;

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} \frac{4x}{x+1} = \frac{4\cdot(1-0)}{1-0+1} = \frac{4}{2} = 2;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} (3-x) = 3-(1+0) = 2.$$

Оскільки обидві односторонні границі існують, скінченні, рівні між собою і дорівнюють значенню самої функції, то $x_3 = 1$ – точка неперервності. ■

Приклад 15. Розв’язати наступну квадратну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}$$

трьома способами: а) матричним методом; б) за правилом Крамера; в) методом Гаусса:

□ а) Спочатку шукаємо розв'язок матричним методом.

$$\text{Тут}\quad A=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&-2&2\\-1&3&-4\end{pmatrix}\ \text{і}\ \ B=\begin{pmatrix}1\\6\\-10\end{pmatrix},$$

$$\text{Тоді}\qquad |A|=\begin{vmatrix}2&1&3\\3&-2&2\\-1&3&-4\end{vmatrix}=35.$$

Обчислюємо обернену матрицю. Вона має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}2&13&8\\10&-5&5\\7&-7&-7\end{pmatrix}$$

тоді

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}2&13&8\\10&-5&5\\7&-7&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\-10\end{pmatrix}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}0\\35\\35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Отже $x_1=0,\ x_2=-2,\ x_3=1$.

б) Використовуючи формули Крамера, отримаємо:

$$\Delta=|\mathrm{A}|=35;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1&1&3\\6&-2&2\\-10&3&-4\end{vmatrix}=0;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&1&3\\3&6&2\\-1&-10&-4\end{vmatrix}=-70;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&-2&6\\-1&3&-10\end{vmatrix}=35;$$

$$\mathrm{x}_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=0;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-2;\ \mathrm{x}_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=1.$$

в) За методом Гаусса складемо таблицю

$$C_0:\quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	1
2	1	3	1
3	-2	2	6
-1	3	-4	-10

Проводимо «прямий хід» – процес вилучення «згори – вниз». Перший рядок помножимо на 3/2 і віднімемо від другого. Далі помножимо перший рядок на 1/2 і додамо до третього рядка. Дістанемо таблицю

C_1:

x_1	x_2	x_3	1
2	1	3	1
0	$-7/2$	$-5/2$	$9/2$
0	$7/2$	$-5/2$	$-19/2$

Другий рядок додамо до третього:

C_2:

x_1	x_2	x_3	1
2	1	3	1
0	$-7/2$	$-5/2$	$9/2$
0	0	-5	-5

Поділивши перше рівняння на 2, друге рівняння на -7/2, а третє – на -5, дістанемо трикутну систему з одиницями на головній діагоналі матриці:

$$\begin{cases} x_1 + (1/2)\,x_2 + (3/2)x_3 = 1/2, \\ \qquad x_2 + (5/7)\,x_3 = -9/7, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

Проводимо «зворотний хід» – розв'язування трикутної системи «знизу – вгору». Послідовно розв'язуючи цю систему «знизу – вгору», знаходимо:

$$x_3 = 1; \quad x_2 = -9/7 - (5/7)\,x_3 = -9/7 - (5/7)\cdot 1 = -2\,;$$

$$x_1 = 1/2 - (1/2)\,x_2 - (3/2)x_3 = 1/2 - (1/2)\cdot(-2) - (3/2)\cdot 1 = 0\,.$$

Відповіді, отримані трьома методами, співпали. ■

Приклад 16. Перевірити правильність теореми Келі – Гамільтона для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

□ Знаходимо характеристичний многочлен матриці A:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 5\,.$$

Обчислимо значення відповідного матричного многочлена:

$$A^2 + 3A + 5E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad ■$$

4.2 Задачі до змістового модуля 1.2 Диференціальне числення функцій однієї змінної. Векторна алгебра. Аналітична геометрія в просторі

Приклад 1. Знайти похідну y':

а) $y = arctg^7 x \;\; log_5(x^2 - 5)$, б) $y = \dfrac{(4x+5)^2}{e^{tg\,x}}$.

□ а) $y = arctg^7 x \cdot log_5(x^2 - 5)$. Спочатку розкладемо похідну за правилом диференціювання добутку, а потім використаємо формули з таблиці похідних:

$$y' = \left(arctg^7 x\right)' \cdot log_5\left(x^2 - 5\right) + arctg^7 x \cdot \left(log_5\left(x^2 - 5\right)\right)' =$$

$$= 7arctg^6 x \cdot (arctg\,x)' \cdot log_5\left(x^2 - 5\right) + arctg^7 x \cdot \frac{1}{\left(x^2 - 5\right) ln5} \times$$

$$\times\left(x^2-5\right)'=\frac{7arctg^6x\ \ log_5\left(x^2-5\right)}{1+x^2}+\frac{2x\ \ arctg^7x}{\left(x^2-5\right)ln5};$$

б) $y=\dfrac{(4x+5)^2}{e^{tg\,x}}$. У цьому прикладі спочатку використовуємо правило диференціювання дробу, а потім – формули з таблиці похідних:

$$y'=\frac{\left((4x+5)^2\right)'\ \ e^{tg\,x}-(4x+5)^2\ \ \left(e^{tg\,x}\right)'}{\left(e^{tg\,x}\right)^2}=$$

$$=\frac{2(4x+5)(4x+2)'\,e^{tg\,x}-(4x+5)^2e^{tg\,x}(tg\,x)'}{e^{2\,tg\,x}}=$$

$$=\frac{2(4x+5)\cdot 4e^{tg\,x}-(4x+5)^2e^{tg\,x}\cdot\left(1/\cos^2x\right)}{e^{2\,tg\,x}}=$$

$$=\frac{8(4x+5)\cos^2x-(4x+5)^2e^{tg\,x}}{e^{tg\,x}\cos^2x}.\quad\blacksquare$$

Приклад 2. Знайти похідну y'_x : $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=4t-t^4\end{cases}$.

□ Знаходимо $x'_t=\left(2t-t^2\right)'=2-2t=2(1-t)$ і $y'_t=\left(4t-t^4\right)'=4-4t^3=4(1-t^3)$. Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t у формулу $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, дістанемо

$$y'_x=\frac{4(1-t^3)}{2(1-t)}=2(1+2t+t^2).\quad\blacksquare$$

Приклад 3. Знайти похідну y'_x : $y^5-4x^6+x^2y^3-1=0$.

□ Продиференціюємо рівняння по *x*, вважаючи, що *y* є функцією від *x*:

$$5y^4y'-24x^5+2xy^3+x^23y^2y'=0.$$

Розв’яжемо отримане рівняння відносно y':

$$5y^4y' + 3x^2y^2y' = 24x^5 - 2xy^3\,; \quad y'(5y^4 + 3x^2y^2) = 24x^5 - 2xy^3\,;$$

$$y' = (24x^5 - 2xy^3)\big/(5y^4 + 3x^2y^2)\,. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти похідну y': $y = (x^3 - 1)^{\cos x}$.

□ Прологарифмуємо обидві частини рівняння, що задає функцію:

$$\ln y = \ln(x^3 - 1)^{\cos x}; \quad \ln y = \cos x \cdot \ln(x^3 - 1)\,.$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності:

$$\left(\ln y\right)' = \left(\cos x \cdot \ln(x^3 - 1)\right)'; \; \frac{1}{y}y' = -\sin x \cdot \ln(x^3 - 1) + \cos x \cdot \frac{3x^2}{x^3 - 1}\,.$$

З отриманого рівняння виразимо y':

$$y' = \left(-\sin x \cdot \ln(x^3 - 1) + 3x^2(x^3 - 1)^{-1}\cos x\right)y\,.$$

В одержану рівність замість y підставимо явний вираз для даної функції:

$$y' = \left(-\sin x \cdot \ln(x^3 - 1) + 3x^2(x^3 - 1)^{-1}\cos x\right)(x^3 - 1)^{\cos x}\,. \quad \blacksquare$$

Приклад 5. Скласти рівняння нормалі, що проходить через точку $M_0(2;1)$ графіка неявної функції $y = y(x)$, яка задана рівнянням $\ln y + 3x^2 = x^4 - 2y^2 - 2$.

□ Знайдемо похідну функції, що задана неявно:

$$\left(\ln y + 3x^2\right)' = \left(x^4 - 2y^2 - 2\right)'; \; \frac{1}{y}y' + 6x = 4x^3 - 4yy'\,;$$

$$y' + 4y^2y' = 4x^3y - 6xy\,; \quad y' = \frac{4x^3y - 6xy}{1 + 4y^2}\,;$$

$$y'_0 = \frac{4 \cdot 2^3 \cdot 1 - 6 \cdot 2 \cdot 1}{1 + 4 \cdot 1^2} = 4\,.$$

Тоді рівняння нормалі:

$$y-1=-\frac{1}{4}(x-2)\,; \qquad y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

Приклад 6. Знайти диференціал dy : $\quad y=\dfrac{x^5}{\sin x}$.

$$\square \quad y'=\frac{\left(x^5\right)'\sin x-x^5\left(\sin x\right)'}{\sin^2 x}=\frac{5x^4\sin x-x^5\cos x}{\sin^2 x}\,;$$

$$dy=y'dx=\frac{5x^4\sin x-x^5\cos x}{\sin^2 x}dx\,. \qquad \blacksquare$$

Приклад 7. Знайти вираз для похідної по x вказаного порядку:

а) $y=xe^{-2x}$, $\quad y'''=?$ б) $x^2-y+3=\ln y$, $\quad y''=?$

$$\text{в)}\ \begin{cases} x=t^4-2t^2 \\ y=3t^4+4t^3 \end{cases} \qquad y''_{xx}=?$$

$\square$ а) $y'=e^{-2x}+xe^{-2x}(-2)=(1-2x)e^{-2x}$; $\; y''=\left(1-2x\right)'e^{-2x}+$

$$+(1-2x)\left(e^{-2x}\right)'=-2e^{-2x}+(1-2x)e^{-2x}(-2)=4(x-1)e^{-2x}\,;$$

$$y'''=4\left(\left(x-1\right)'e^{-2x}+(x-1)\left(e^{-2x}\right)'\right)=4\left(e^{-2x}+(x-1)e^{-2x}(-2)\right)=$$

$$=4(3-2x)e^{-2x}\,;$$

б) $\qquad \left(x^2-y+3\right)'=\left(\ln y\right)'$; $\;2x-y'=\dfrac{y'}{y}$;

$$2xy-yy'=y'\,; \quad y'+yy'=2xy\,; \quad y'=\frac{2xy}{1+y}\,;$$

$$y''=2\frac{\left(xy\right)'\left(1+y\right)-xy\left(1+y\right)'}{(1+y)^2}=2\frac{(y+xy')(1+y)-xyy'}{(1+y)^2}=$$

$$= 2\frac{y + y^2 + xy'}{(1+y)^2}; \quad y'' = 2\frac{y + y^2 + x\dfrac{2xy}{1+y}}{(1+y)^2} = \frac{2y(1 + 2y + y^2 + 2x^2)}{(1+y)^3};$$

в) $x_t' = 4t^3 - 2\cdot 2t = 4t(t^2-1)$; $\quad y_t' = 3\cdot 4t^3 + 4\cdot 3t^2 = 12t^2(t+1)$;

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{12t^2(t+1)}{4t(t^2-1)} = \frac{3t}{t-1}; \quad \left(y_x'\right)_t' = 3\frac{t'(t-1) - t(t-1)'}{(t-1)^2} = \frac{-3}{(t-1)^2};$$

$$y_{xx}'' = \left(y_x'\right)_t' : x_t' = \frac{-3}{(t-1)^2} : \left(4t(t^2-1)\right) = \frac{-3}{4t(t-1)^3(t+1)}. \ ■$$

Приклад 8. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$; в) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tg\,x + \dfrac{1}{\sin x - 1}\right)$.

□ а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^{3x}}{2x} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9e^{3x}}{2} = \left|\dfrac{\infty}{2}\right| = +\infty.$

(Застосували правило Лопіталя двічі).

б) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^4}2x} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0.$

(Виконали попереднє перетворення $0\cdot\infty$ до ∞/∞).

в) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tg\,x + \dfrac{1}{\sin x - 1}\right) = |\infty - \infty| = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\sin^2 x - \sin x + \cos x}{\cos x\cdot(\sin x - 1)} =$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\sin x\cos x - \cos x - \sin x}{-\sin x\cdot(\sin x - 1) + \cos^2 x} = \left|\frac{-1}{+0}\right| = -\infty$$

(Виконали перетворення $\infty - \infty$ до $0/0$ і застосували правило Лопіталя. Врахували, що $|\sin x| \le 1$). ■

Приклад 9. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{tg\,3x}$.

□ Функція під знаком границі є показниково-степеневою. Позначимо шукану границю через A, прологарифмуємо її та змінимо порядок виконання операцій граничного переходу і логарифмування. Здійснимо перетворення невизначеності до вигляду дробу $0/0$ або ∞/∞ і скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(arcsin\,x\right)^{tg\,3x} = \left|0^0\right| = A;\quad ln\,A = ln\lim_{x\to 0}\left(arcsin\,x\right)^{tg\,3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} ln\left(arcsin\,x\right)^{tg\,3x} = \lim_{x\to 0} tg\,3x\cdot ln\,arcsin\,x = \lim_{x\to 0}\frac{ln\,arcsin\,x}{ctg\,3x} =$$

$$= \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{arcsin\,x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\dfrac{3}{sin^2 3x}} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{arcsin\,x}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cos 3x\cdot 3}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\times 1 = 0\,.$$

Отже, $ln\,A = 0$ і тоді $A = e^0 = 1.$ ■

Приклад 10. Дослідити на монотонність функцію $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x-4}$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \ x-4\neq 0;\ \ x\neq 4;\ \ x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty)\,.$$

Похідна цієї функції

$$y' = \frac{(1/3)\cdot x^{-2/3}(x-4)-\sqrt[3]{x}}{(x-4)^2} = -\frac{2(x+2)}{3\sqrt[3]{x^2}\,(x-4)^2}\,.$$

Критичні точки: 1) стаціонарні точки $y'=0$:

$$-\frac{2(x+2)}{3\sqrt[3]{x^2}\,(x-4)^2} = 0;\quad x+2=0;\ \ x=-2\in D(y)\,;$$

2) точки розриву похідної y':

$$3\sqrt[3]{x^2}\,(x-4)^2 = 0\,;\ \ \sqrt[3]{x^2} = 0 \ \text{або}\ (x-4)^2 = 0;$$

$$x = 0 \in D(y)\,;\ \ x = 4 \notin D(y)\,.$$

Отже, $x_1 = -2$ і $x_2 = 0$ – критичні точки похідної, причому перша є стаціонарною точкою, а друга – точкою розриву похідної.

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 1). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, і визначаємо в них знак похідної.

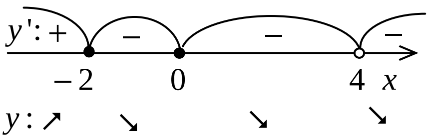


Рисунок 1

Функція зростає при $x \in (-\infty; -2)$; функція спадає при $x \in (-2; 4) \cup (4; +\infty)$. ■

Приклад 11. Дослідити на екстремум функцію $y = \dfrac{\ln^6 x}{x^2}$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad x \in (0; +\infty)\,.$$

Похідна цієї функції

$$y' = \frac{6\ln^5 x \cdot (1/x) \cdot x^2 - \ln^6 x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2\ln^5 x \cdot (3 - \ln x)}{x^3}\,.$$

Критичні точки:

1) стаціонарні точки $y' = 0$:

$$\frac{2\ln^5 x \cdot (3 - \ln x)}{x^3} = 0\,;\ \ \ln^5 x = 0 \ \text{ або }\ 3 - \ln x = 0\,;$$

$$x_1 = 1 \in D(y)\,;\ \ x_2 = e^3 \in D(y)\,.$$

2) точок розриву похідна y' не має.

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 2). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному зна-

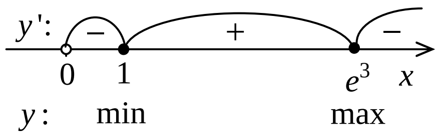


Рисунок 2

ченню аргументу $x_1 = e^{-1}$, $x_2 = e^2$, $x_3 = e^4$ і визначаємо в них знак похідної.

При переході через точку $x_1 = 1$ похідна функції змінює знак з «-» на «+», тому в точці $x_1 = 1$ знаходиться мінімум функції, $x_{\min} = x_1 = 1$, його значення $y_{\min} = y(1) = 0$. При переході через точку $x_2 = e^3$ похідна функції змінює знак з «+» на «-», тому в точці $x_2 = e^3$ знаходиться максимум функції, $x_{\max} = x_2 = e^3$, його значення $y_{\max} = y(e^3) = \dfrac{\ln^6 e^3}{(e^3)^2} = \dfrac{3^6}{e^6}$. ■

Приклад 12. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = (x^2 + 3x - 4)\big/(x^2 - 4)$.

□ Область визначення функції:

$D(y)$: $x^2 - 4 \neq 0$; $x \neq \pm 2$; $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Знаходимо другу похідну:

$$y' = \frac{-3(x^2+4)}{(x^2-4)^2}; \quad y'' = \frac{6x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

Критичні точки другої похідної:

$$1)\ \ y'' = 0; \quad \frac{6x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0; \quad x = 0 \in D(y);$$

2) точки розриву y'': $(x^2 - 4)^3 = 0$; $x = \pm 2 \notin D(y)$.

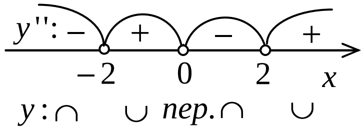


Рисунок 3

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 3). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, і визначаємо в них знак другої похідної.

Функція опукла при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$; функція вгнута при $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$. Перегин при $x_{пер} = 0$. Тоді

$$y_{пер} = \frac{0^2 + 3 \cdot 0 - 4}{0^2 - 4} = 1.$$

Отже, $M(0;1)$ – точка перегину. ■

Приклад 13. Знайти асимптоти функції $y = \dfrac{2x^2 + 7x - 1}{x + 3}$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ x + 3 \neq 0;\ x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty).$$

$x = -3$ – точка, що «підозріла» на вертикальну асимптоту.

$$\lim_{x \to -3-0} \frac{2x^2 + 7x - 1}{x + 3} = \left| \frac{-4}{-0} \right| = +\infty; \quad \lim_{x \to -3+0} \frac{2x^2 + 7x - 1}{x + 3} = \left| \frac{-4}{+0} \right| = -\infty.$$

Отже, $x = -3$ – вертикальна асимптота.

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 7x - 1}{(x+3)x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 + 7/x - 1/x^2}{1 + 3/x} = 2;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 7x - 1}{x + 3} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 7x - 1 - 2x^2 - 6x}{x + 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 1}{x + 3} = 1.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (-5/2 - 1/2x) = -5/2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

Отже, $y = 2x + 1$– похила (ліва і права) асимптота. ■

Приклад 14. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2}{4(x + 2)}$ та побудувати ескіз її графіка.

□ Область визначення:

$$x+2\neq 0;\quad x\neq -2;\quad D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty).$$

Обчислимо $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{4(-x+2)}\neq y(x),-y(x)$. Отже, функція ні парна, ні непарна.

Точка перетину з віссю Oy: $x=0$; $y(0)=\dfrac{0}{4(0+2)}=0$. Точки перетину з віссю Ox: $\dfrac{x^2}{4(x+2)}=0$; $x=0$. Отже, графік функції проходить через початок координат.

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи від'ємна (рис. 4): функція від'ємна при $x\in(-\infty;-2)$; функція додатна при $x\in(-2;+\infty)$.

Інтервали монотонності та екстремуми:

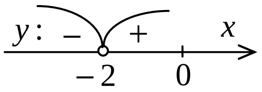


Рисунок 4

$$y'=\frac{2x(x+2)-x^2}{4(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{4(x+2)^2};$$

$$y'=0:\ \frac{x^2+4x}{4(x+2)^2}=0;\quad x^2+4x=0;$$

$$x_1=-4\in D(y);\quad x_2=0\in D(y).$$

Похідна y' не існує, якщо $x=-2\notin D(y)$. Отже, функція має дві стаціонарні точки $x_1=-4$ і $x_2=0$.

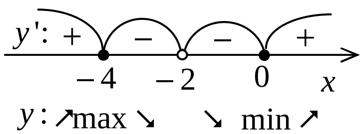


Рисунок 5

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно знаку похідної показано на рис. 5.

Функція зростає при $x\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$; функція спадає при $x\in(-4;-2)\cup(-2;\,0)$.

Зміна знака похідної при переході через точки $x_1=-4$ і $x_2=0$ вказує на те, що ці точки – екстремальні. За характером зміни знака визначаємо, що $x_{\max}=-4$ – точка максимуму, а $x_{msn}=0$ – точка мінімуму. Відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\max} = y(-4) = -2\,;\quad y_{msn} = y(0) = 0\,.$$

Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції:

$$y'' = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+4x)}{4(x+2)^4} = \frac{2}{(x+2)^3}\,.$$

$y''=0$: $x \in \varnothing$. Точки розриву y'': $x=-2 \notin D(y)$.

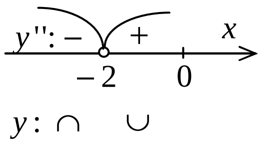


Рисунок 6

Знак другої похідної і характер опуклості графіка функції на відповідних інтервалах приведені на рис. 6.

Функція опукла при $x \in (-\infty; -2)$; функція вгнута при $x \in (-2; +\infty)$. Точок перегину немає.

Пряма $x=-2$ служить вертикальною асимптотою, тому що

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^2}{4(x+2)} = -\infty\,;\quad \lim_{x\to -2+0} \frac{x^2}{4(x+2)} = +\infty\,.$$

Знайдемо невертикальні асимптоти $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{4(x+2)x} = \frac{1}{4} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+2/x} = \frac{1}{4}\,;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(y(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{4(x+2)} - \frac{1}{4}x \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+2} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+2/x} = -\frac{1}{2}\,.$$

Таким чином, маємо похилу асимптоту $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

Для уточнення розміщення графіка функції проведемо додаткові обчислення її значень:

$$y(-6) = -2{,}25\,;\quad y(-3) = -2{,}25\,;\quad y(-1) = 0{,}25\,;\quad y(2) = 0{,}25\,.$$

Побудуємо ескіз графіка функції, використовуючи отриману вище інформацію (рис. 7).

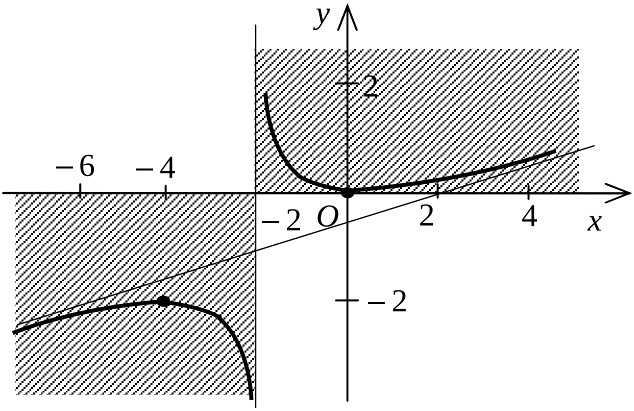


Рисунок 7

Приклад 15. Знайти точку $C(x;\ y;\ z)$, яка ділить відрізок AB у заданому відношенні $\lambda = 3$, починаючи від точки A, якщо $A(6;\,-4;\,-2)$ і $B(4;\ 0;\,-8)$.

$$\square\ \ C:\quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{6 + 3\cdot 4}{1+3} = \frac{9}{2};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} =$$

$$= \frac{-4 + 3\cdot 0}{1+3} = -1;\quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{-8 + 3\cdot(-4)}{1+3} = -5;$$

$$C(9/2; -1;\,-5).\quad \blacksquare$$

Приклад 16. Знайти кут між векторами $\vec{a} = (2;-1;-2)$ і $\vec{b} = (0;\ 6;\ 8)$.

$$\square\ \ \cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{2\cdot 0 - 1\cdot 6 - 2\cdot 8}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\sqrt{0^2 + 6^2 + 8^2}} = -\frac{11}{15};$$

$$\varphi = \pi - \arccos(11/15).\quad \blacksquare$$

Приклад 17. Для піраміди з вершинами $O(0;\,0;\,0)$, $A(5;\,-2;\,0)$, $B(2;\,-1;\,-3)$, $C(1;\,0;\,-1)$ обчислити об'єм, площу грані ABC і висоту, опущену на цю грань.

□ Знайдемо об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overrightarrow{AO}=(-5;\,2;\,0)$; $\overrightarrow{AB}=(-3;1;-3)$; $\overrightarrow{AC}=(-4;\,2;\,-1)$:

$$\left(\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 0\\ -3 & 1 & -3\\ -4 & 2 & -1\end{vmatrix}=5+24-6-30=-7.$$

Тоді об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$V_{пір}=\frac{1}{6}\cdot|-7|=7/6\ (куб.од.)$$

Площа грані ABC:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & -3\\ -4 & 2 & -1\end{vmatrix}=5\vec{i}+9\vec{j}-2\vec{k};$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+9^2+(-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{78}\ (кв.\ од.).$$

Висота піраміди $h=\dfrac{3V}{S}=\dfrac{7\sqrt{78}}{78}$. ■

Приклад 18. Перевірити, що задані три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c зазначеного вектора $\vec{d}$ у цьому базисі $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$:

$$\vec{a}=(9;\,-3;\,4);\quad \vec{b}=(1;0;\,-1);\quad \vec{c}=(-2;\,1;-5);\quad \vec{d}=(-2;\,1;3).$$

$$\square\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}9 & -3 & 4\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & -5\end{vmatrix}=0-6+4-0-15+9=-8\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні і утворюють базис. Складемо і розв’яжемо систему рівнянь для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$:

$$\begin{cases}9d_a+d_b-2d_c=-2\\ -3d_a \qquad +d_c=1\\ 4d_a-d_b-5d_c=3\end{cases}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}9 & 1 & -2\\ -3 & 0 & 1\\ 4 & -1 & -5\end{vmatrix}=-8\neq 0;$$

$$\Delta^{(1)}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -5\end{vmatrix}=8;\quad \Delta^{(2)}=\begin{vmatrix}9 & -2 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -5\end{vmatrix}=-24;$$

$$\Delta^{(3)}=\begin{vmatrix}9 & 1 & -2\\ -3 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=16;\quad d_a=\frac{\Delta^{(1)}}{\Delta}=\frac{8}{-8}=-1;$$

$$d_b=\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta}=\frac{-24}{-8}=3;\quad d_c=\frac{\Delta^{(3)}}{\Delta}=\frac{16}{-8}=-2.\ \blacksquare$$

Приклад 19. Звести загальне рівняння площини

$$3x-2y+4z+18=0$$

до вигляду рівняння у відрізках на осях.

$$\square\quad 3x-2y+4z=-18\ \Big|:(-18);\quad \frac{x}{-6}+\frac{y}{9}+\frac{z}{-9/2}=1.$$

Отже, площина перетинає осі координат у точках

$$x=-6;\ y=9;\ z=-9/2.\ \blacksquare$$

Приклад 20. Дано три точки $M(1;-1;3)$, $N(-2;-3;0)$ і $P(5;\,2;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки.

$$\square \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-3 \\ -2-1 & -3-(-1) & 0-3 \\ 5-1 & 2-(-1) & -1-3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)\cdot(-2)\cdot(-4)+(y+1)\cdot(-3)\cdot 4+(z-3)\cdot(-3)\cdot 3-$$

$$-(z-3)\cdot(-2)\cdot 4-(x-1)\cdot(-3)\cdot 3-(y+1)\cdot(-3)\cdot(-4)=0;$$

$$8x-8-12y-12-9z+27+8z-24+9x-9-12y-12=0;$$

$$17x-24y-z-29=0. \quad \blacksquare$$

Приклад 21. Знайти канонічні рівняння прямої l, що задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} x-2y-4z+2=0 \\ 3x-y+2z+5=0 \end{cases}.$$

□ Перший спосіб. Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8\,\vec{i} - 14\,\vec{j} + 5\,\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x_0 = 0$, тоді

$$\begin{cases} -2y_0-4z_0+2=0 \\ -y_0+2z_0+5=0 \end{cases}; \quad y_0=3; \quad z_0=-1; \quad M_0(0;3;-1).$$

Канонічні рівняння

$$\frac{x-0}{-8} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z-(-1)}{5}; \qquad \frac{x}{-8} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z+1}{5}.$$

Другий спосіб. Знайдемо дві різні точки на прямій. Одна точка $M_0(0;3;-1)$ вже відома. Нехай $x_2 = -2$, тоді

$$\begin{cases} -2-2y_2-4z_2+2=0 \\ 3\cdot(-2)-y_2+2z_2+5=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y_2=-2z_2 \\ 2z_2+2z_2-1=0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} z_2=1/4; \\ y_2=-1/2; \end{matrix}$$

$$M_2\left(-2;-1/2;1/4\right).$$

Скористаємося рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-3}{-1/2-3}=\frac{z+1}{1/4+1}; \quad \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{-7/2}=\frac{z+1}{5/4};$$

$$\frac{x}{-8}=\frac{y-3}{-14}=\frac{z+1}{5}. \quad ■$$

Приклад 22. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-4}$ і точку $M(-2;\,-3;\,6)$.

□ Знаходимо загальні рівняння прямої:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}; \\ \frac{x-1}{3}=\frac{z-3}{-4}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-2=3y+6; \\ -4x+4=3z-9; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3y-8=0; \\ 4x+3z-13=0. \end{cases}$$

Утворимо пучок площин

$$2x-3y-8+\lambda(4x+3z-13)=0$$

і визначимо ту з них, якій належить точка $M(-2;\,-3;\,6)$. Маємо

$$2\cdot(-2)-3\cdot(-3)-8+\lambda(4\cdot(-2)+3\cdot6-13)=0;$$

$$-3-3\lambda=0;\;\; \lambda=-1.$$

Остаточно запишемо рівняння шуканої площини:

$$2x-3y-8+(-1)(4x+3z-13)=0;\;\; 2x-3y-8-4x-$$

$$-3z+13=0;\;\; -2x-3y-3z+5=0;\;\; 2x+3y+3z-5=0. \quad ■$$

Приклад 23. Звести загальне рівняння поверхні до канонічного вигляду і визначити її тип: $x^2+2y^2+3z^2-6x+4y-24z+39=0$.

□ Об’єднаємо в групи члени, які містять однойменні координати, потім виділимо в групах повні квадрати двочленів. Одержимо:

$$(x^2-6x)+2(y^2+2y)+3(z^2-8z)+39=0;$$

$$(x^2-2\cdot x+1^2-1^2)+2(y^2+2\cdot y+1^2-1^2)+$$

$$+3(z^2-2\cdot 4z+4^2-4^2)+39=0\,;$$

$$(x-1)^2-1+2(y+1)^2-2+3(z-4)^2-48+39=0\,;$$

$$(x-1)^2+2(y+1)^2+3(z-4)^2=12\,.$$

Поділимо обидві частини отриманого рівняння на вільний член 12:

$$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+1)^2}{6}+\frac{(z-4)^2}{4}=1;\ \frac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}+\frac{(y+1)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}+\frac{(z-4)^2}{2^2}=1.$$

Розглянемо нову систему координат з початком у точці $O_1(1;-1;4)$, що одержується зі старої паралельним перенесенням. Позначаючи нову систему координат O_1XYZ, будемо мати $X=x-1,\ Y=y+1,\ Z=z-4$. У новій системі координат поверхня задається канонічним рівнянням

$$\frac{X^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}+\frac{Z^2}{2^2}=1,$$

що визначає еліпсоїд з центром у точці $O_1(1;-1;4)$ і півосями $a=2\sqrt{3};\ b=\sqrt{6};\ c=2$. ■

5 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Після вивчення кожної теми студенту рекомендується відтворити по пам'яті означення ключових термінів, виведення основних формул, формулювання та ідеї доведення теорем, їх геометричний та інший прикладний зміст. Питання для самодіагностики мають служити студенту підмогою в повторенні, закріпленні та перевірці міцності засвоєння вивченого матеріалу.

При необхідності слід ще раз уважно розібратися в теоретичному матеріалі, розв'язати ще декілька задач відповідної тематики та повторно відповісти на питання для самоконтролю. При сумнівах у правильності відповідей на питання для самоперевірки студент може також звернутися за консультацією до викладача.

5.1 Питання до змістового модуля 1.1 Аналітична геометрія на площині. Вступ до аналізу. Лінійна алгебра

1) Що служить координатною сіткою декартової системи координат на площині?

2) За якою формулою обчислюється відстань між двома точками на площині?

3) За якими співвідношеннями обчислюються координати точки, що ділить даний відрізок у вказаному відношенні?

4) Як записується рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?

5) Який вигляд має рівняння прямої, що паралельна осі ординат Oy?

6) Наведіть рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.

7) Як записується рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?

8) Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях?

9) Наведіть загальне рівняння прямої.

10) Як знайти гострий кут між двома похилими прямими?

11) Яка умова паралельності двох похилих прямих?

12) Яка умова перпендикулярності двох похилих прямих?

13) За якою формулою обчислюється відстань від точки до прямої?

14) Який вигляд має загальне рівняння лінії другого порядку?

15) Що називається колом? Наведіть канонічне рівняння кола, рівняння кола із заданим центром і радіусом.

16) Що називається еліпсом? Наведіть канонічне рівняння еліпса.

17) Яким співвідношенням зв'язані велика a і мала b півосі еліпса та половина c міжфокусної відстані?

18) Що називається гіперболою? Наведіть канонічне рівняння гіперболи.

19) Яким співвідношенням зв'язані дійсна a і уявна b півосі гіперболи та половина c міжфокусної відстані?

20) Які рівняння асимптот гіперболи?

21) Що називається параболою? Наведіть канонічне рівняння параболи.

22) Що таке ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболи?

23) Які рівняння директрис еліпса, гіперболи, параболи?

24) У чому полягає властивість директрис еліпса, гіперболи, параболи?

25) У чому полягає оптична властивість ліній другого порядку?

26) Як задається полярна система координат? Що таке головні значення полярних координат?

27) Що служить координатною сіткою полярної системи координат?

28) Якими співвідношеннями зв'язані полярні та прямокутні координати?

29) Яким рівнянням задаються лінії другого порядку в полярних координатах?

30) Наведіть параметричні рівняння прямої та кола.

31) Що таке сталі та змінні величини? Наведіть приклади.

32) Яка змінна величина називається обмеженою? Необмеженою?

33) Яка змінна величина називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?

34) Яка змінна величина називається нескінченно малою? Нескінченно великою?

35) Наведіть властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин. Як зв'язані ці величини?

36) Що називається границею змінної величини?

37) Наведіть властивості границь.

38) Що називається першою стандартною границею? Другою стандартною границею? Наведіть їх наслідки.

39) Як здійснюється порівняння нескінченно малих величин? Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих.

40) Як розкривається невизначеність виду ∞/∞ для многочленів?

41) Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для многочленів, ірраціональних та тригонометричних виразів?

42) Дайте означення функції. Що називається областю визначення, областю значень і законом відповідності функції?

43) Що таке природна область визначення аналітично заданої функції? Як вона знаходиться?

44) Що таке графік функції? Наведіть основні способи задання функції.

45) Яка функція називається обмеженою? Необмеженою?

46) Яка функція називається парною? Непарною? Загального вигляду?

47) Яка функція називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?

48) Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади періодичних функцій.

49) Що таке складена функція? Наведіть приклади.

50) Яка функція називається оберненою до даної? Як розміщені графіки взаємно обернених функцій?

51) Яка функція називається елементарною? Наведіть приклади алгебраїчних і трансцендентних функцій.

52) Які функції відносяться до основних елементарних?

53) Наведіть приклади границь, що відображають властивості основних елементарних функцій.

54) Що таке приріст аргументу і відповідний приріст функції? Дайте означення неперервності функції в точці "мовою приростів".

55) Що таке ліва і права границі функції в точці? Дайте означення неперервності функції в точці через односторонні границі.

56) Наведіть основні властивості функцій, які неперервні в точці.

57) Наведіть основні властивості функцій, неперервних на відрізку.

58) Яка функція називається розривною?

59) Що таке точка розриву першого роду? Другого роду? Наведіть приклади точок усувного розриву, скінченного та нескінченного стрибка.

60) Як знаходять точки розриву аналітично заданої функції?

61) Що називається визначником?

62) Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?

63) За яким правилом обчислюється значення визначника n-го порядку?

64) Сформулюйте правила "хреста" і "трикутників" для обчислення відповідно визначників другого і третього порядку.

65) Сформулюйте основні властивості визначника.

66) Як знаходиться значення визначника трикутного вигляду?

67) Що називається матрицею?

68) Яка матриця називається невиродженою?

69) Як здійснюються операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число? Чим відрізняється множення матриці на число від множення визначника на число?

70) Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції?

71) Що таке обернена матриця та як вона обчислюється?

72) Що називається рангом матриці?

73) Як знаходиться ранг матриці методом обвідних мінорів?

74) Які операції називаються елементарними перетвореннями матриці?

75) Які матриці називаються еквівалентними?

76) Як знаходиться ранг матриці методом елементарних перетворень?

77) Який вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими?

78) Яка система називається сумісною? Визначеною?

79) Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі для лінійних систем.

80) Як знаходиться розв'язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці?

81) Як розв'язується квадратна СЛАР методом Крамера?

82) Як розв'язується довільна СЛАР методом Гаусса?

83) Сформулюйте умову наявності в квадратної СЛАР ненульових розв'язків.

84) Що таке власні числа і власні вектори квадратної матриці?

85) Як знаходяться власні числа і власні вектори?

86) Сформулюйте властивості власних чисел і власних векторів.

87) Що таке матричний многочлен?

88) Сформулюйте теорему Келі – Гамільтона про характеристичний многочлен.

5.2 Питання до змістового модуля 1.2 Диференціальне числення функцій однієї змінної. Векторна алгебра. Аналітична геометрія в просторі

1) Що називається похідною функції?

2) У чому полягає фізичний зміст похідної?

3) У чому полягає геометричний зміст похідної? Наведіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.

4) Який зв'язок між диференційованістю та неперервністю?

5) За якими правилами обчислюється похідна суми, різниці, добутку та частки двох функцій?

6) Як знаходиться похідна складеної функції? Оберненої функції? Параметрично заданої функції?

7) Наведіть формули похідних основних елементарних функцій.

8) Як здійснюється диференціювання неявно заданої функції?

9) У чому полягає правило логарифмічного диференціювання?

10) Дайте означення похідної n-го порядку. У чому полягає фізичний зміст другої похідної?

11) Що називається диференціалом функції?

12) У чому полягає геометричний зміст диференціала?

13) Як зв'язані похідна і диференціал?

14) За якими правилами обчислюється диференціал суми, різниці, добутку та частки двох функцій?

15) Наведіть формули диференціалів основних елементарних функцій.

16) Як диференціал застосовується в наближених обчисленнях?

17) Що називається диференціалом n-го порядку?

18) У чому полягає інваріантність форми першого диференціала? Чи поширюється властивість інваріантності на диференціали вищих порядків?

19) Сформулюйте теорему Ролля про корені похідної. Який її геометричний зміст?

20) Сформулюйте теорему Лагранжа про скінченні прирости. Який її геометричний зміст?

21) Сформулюйте теорему Коші про відношення приростів двох функцій.

22) У чому полягає правило Лопіталя? Для розкриття невизначеностей яких видів воно застосовується безпосередньо?

23) Як зводяться невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0 до одного з основних типів $0/0$ чи ∞/∞?

24) Наведіть формулу Тейлора n-го порядку із залишковим членом у формі Лагранжа.

25) Як записується формула Тейлора в диференціальній формі?

26) Наведіть приклади розкладання функцій за формулою Маклорена.

27) Як формула Тейлора застосовується в наближених обчисленнях?

28) У чому полягають достатні умови монотонності та сталості функції?

29) Що називається точкою мінімуму функції? Точкою максимуму?

30) У чому полягає необхідна умова екстремуму?

31) Що таке критичні точки першої похідної? Стаціонарні точки функції?

32) У чому полягає достатня умова екстремуму за першою похідною?

33) Сформулюйте правило дослідження функції на монотонність і екстремум за першою похідною.

34) У чому полягає достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною?

35) Як знаходяться найменше та найбільше значення функції в замкненій області?

36) Яка функція називається опуклою (вгнутою) в точці та на інтервалі?

37) Що таке точка перегину?

38) У чому полягають достатні умови опуклості та вгнутості?

39) У чому полягає необхідна умова точки перегину?

40) Що таке критичні точки другої похідної?

41) Сформулюйте правило дослідження функції на опуклість, угнутість та перегин за другою похідною.

42) Що називається асимптотою графіка функції? На які види діляться асимптоти?

43) Який вигляд має рівняння вертикальної асимптоти? Похи-

лої асимптоти?

44) Опишіть загальну схему повного дослідження функції та побудови ескіза графіка.

45) Як задається прямокутна система координат у просторі? Як утворюється координатна сітка цієї системи координат?

46) Що таке скалярні та векторні величини?

47) Які вектори називаються колінеарними? Компланарними? Рівними?

48) Як знаходяться сума, різниця двох векторів і добуток вектора на число?

49) Як знаходяться проекція вектора на ненульовий вектор?

50) Що таке координати вектора? Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі?

51) Як знаходяться модуль і напрямні косинуси вектора, заданого в координатній формі?

52) Як формулюється умова колінеарності двох векторів?

53) Як знаходяться координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні?

54) Що називається скалярним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?

55) У чому полягає умова ортогональності двох векторів?

56) Що називається векторним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?

57) У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?

58) Що називається мішаним добутком трьох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?

59) У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?

60) У чому полягає умова компланарності трьох векторів?

61) Яка трійка векторів утворює базис? Як знайти координати вектора в даному базисі?

62) Що називається n-вимірним векторним простором? Який простір є лінійним?

63) Яка система векторів називається лінійно незалежною?

64) Що таке базис n-вимірного векторного простору?

65) Що називається лінійним відображенням? Що таке матриця лінійного відображення?

66) Наведіть основні типи рівняння площини.

67) Як обчислюється кут між площинами?

68) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярнос-

ті двох площин.

69) Як обчислюється відстань від точки до площини?

70) Наведіть основні типи рівняння прямої у просторі.

71) Як обчислюється кут між прямими у просторі?

72) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.

73) Як обчислюється кут між прямою і площиною?

74) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

75) Як знаходиться відстань між непаралельними прямими?

76) Як знаходиться відстань від точки до прямої у просторі?

77) Яка поверхня називається сферою? Наведіть канонічне рівняння сфери та рівняння сфери зі зміщеним центром.

78) Запишіть загальне рівняння поверхні другого порядку.

79) Яка поверхня називається циліндричною? Запишіть канонічні рівняння еліптичного, гіперболічного, параболічного циліндрів.

80) Яка поверхня називається конічною? Наведіть канонічне рівняння конуса другого порядку.

81) Як утворюється поверхня обертання? Як знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї ж площини?

82) Запишіть канонічні рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, еліптичного та гіперболічного параболоїдів. Які з цих поверхонь є лінійчатими?

6 КОНТРОЛЬ І КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ

Результативність вивчення вищої математики забезпечується ефективною системою контролю, яка включає в себе опитування студентів за змістом лекцій, перевірку виконання поточних домашніх завдань, перевірку із захистом виконання проміжних рейтингових індивідуальних завдань, перевірку виконання проміжних модульних контрольних робіт і підсумкове оцінювання за кожний семестр у формі письмового екзамену.

Контроль успішності та якості навчання здійснюється з використанням методів і засобів, що визначаються Університетом і розробляються та контролюються його відповідними службами. Оцінка знань студента за модуль в цілому включає три виміри (табл. 6.1): кількість балів за стобальною системою; оцінка за національною шкалою (за традиційною п’ятибальною системою в термінах «відмінно» – «незадовільно»); літерна оцінка за шкалою ЄКТС. Рейтинг студента з вищої математики протягом семестру в будь-який звітний момент часу дорівнює поточній сумі балів, набраних у процесі навчання, а на завершальному етапі – повній сумі балів за модуль.

Таблиця 6.1 – Шкала оцінювання: національна та ЄКТС

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою	Оцінка за шкалою ЄКТС
	для екзамену	
90–100	Відмінно	A
82–89	Добре	B
74–81		C
64–73	Задовільно	D
60–63		E
35–59	Незадовільно з можливістю повторного складання	FX
0–34	Незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни	F

Під час поточного контролю знань оцінюються системність та активність роботи на практичних заняттях і лекціях та якість виконання поточних домашніх завдань.

Завданням проміжного контролю за кожний змістовий модуль є перевірка ступеню розуміння та засвоєння відповідного матеріалу, сформованості вмінь і навичок самостійно розв’язувати задачі, що відображають зміст розділів програми. Під час проміжного контролю оцінюються якість виконання проміжних рейтингових індивідуальних завдань та якість виконання письмових модульних контрольних робіт.

На кожній проміжній контрольній роботі студент отримує індивідуальний білет, що складається з декількох задач. Виконувати пропущені з поважних чи неповажних причин контрольні роботи або повторно їх перездавати для підвищення оцінки студент може на додаткових заняттях згідно з розкладом чи за індивідуальним графіком за наявності допуску деканату та викладача.

Якість виконання РІЗ перевіряється викладачем і остаточно визначається під час захисту у вигляді співбесіди зі студентом. Оцінюються: знання відповідних теоретичних положень і формул, кількість розв’язаних задач, самостійність і своєчасність виконання, якість розв’язання кожної задачі, вміння розв’язувати подібні задачі та приклади. Якщо робота не одержала позитивної оцінки або виявлені окремі суттєві недоліки, то потрібно здійснити відповідні виправлення та доповнення, а потім повторно пред'явити роботу для перевірки і співбесіди.

Підсумковий контроль знань за модуль проводиться у формі письмового екзамену, метою якого є перевірка засвоєння студентом програмного матеріалу в цілому, розуміння логіки та взаємозв’язків між окремими розділами, здатності творчого застосування накопичених знань для розв’язування практичних задач. Означення, теореми, правила повинні формулюватися точно і з розумінням їх суті. Розв'язування задач повинно виконуватись упевнено та без помилок. Кожне завдання повинно оформлюватись стисло, ретельно та чітко.

Перелік екзаменаційних завдань, що відображають зміст програми дисципліни, та критерії їх оцінювання визначаються кафедрою та заздалегідь доводяться до відома студентів. Основні критерії оцінювання знань і вмінь студентів відображені в табл.6.2. Оцінка за модуль, яка проставляється в заліково-екзаменаційну відомість, визначається набраною сумою балів за всі навчальні одиниці.

Таблиця 6.2 – Критерії оцінювання знань і вмінь студентів з дисципліни «вища математика»

Оцінка			Вимоги
Сума балів	Оцін-ка ЄКТС	Оцін-ка за нац. шка-лою	
1	2	3	4
90–100	A	Від-мінно	Вільне володіння теоретичним матеріалом у повному обсязі: означення понять та їх ґрунтовне тлумачення, формулювання теорем та їх доведення, формулювання правил та їх обґрунтування, знання формул та обґрунтування їх застосування. Вільне застосування теоретичних знань до розв'язування задач і аналізу одержаних розв'язків в об'ємі 90–100% від запропонованих задач. Відсутність суттєвих помилок при обчисленнях і побудовах креслень, грамотне й акуратне виконання всіх розрахунків і креслень.
82–89	B	Добре	Володіння основним теоретичним матеріалом у повному обсязі: означення понять та їх тлумачення, формулювання теорем та їх доведення, формулювання правил та їх обґрунтування, знання формул та обґрунтування їх застосування. Застосування теоретичних знань до розв'язання задач і аналізу одержаних розв'язків в об'ємі 82–89% від запропонованих задач. Наявність неістотних помилок при обчисленнях і побудовах креслень, які не впливають на загальний результат роботи (помилки при округленні чисел, неточність у побудові точок і ліній, відсутність позначень на кресленнях тощо).
74–81	C	Добре	Володіння основним теоретичним матеріалом у повному обсязі: означення понять та їх тлумачення, формулювання теорем та їх доведення, формулювання правил та їх обґрунтування, знання формул та обґрунтування їх застосування. Припускаються деякі помилки по другорядним питанням курсу. Застосування теоретичних знань до розв'язання задач і аналізу одержаних розв'язків в об'ємі 74–81% від запропонованих задач.

Закінчення таблиці 6.2

1	2	3	4
64–73	D	Задовільно	Орієнтація в теоретичному матеріалі: означення понять без їх повного тлумачення, формулювання теорем без повного доведення, формулювання правил без їх обґрунтування, знання формул без обґрунтування їх застосування. Застосування теоретичних знань до розв'язання задач без аналізу одержаних розв'язків в об'ємі 64–73% від запропонованих задач. Наявність помилок, які суттєво не впливають на остаточний результат.
60–63	E	Задовільно	Орієнтація в теоретичному матеріалі: означення понять без їх повного тлумачення, формулювання теорем без повного доведення, формулювання правил без їх обґрунтування, знання формул без обґрунтування їх застосування. Застосування теоретичних знань до розв'язання задач без аналізу одержаних розв'язків в об'ємі 60–63% від запропонованих задач.
35–59	FX	Незадовільно	Початкове ознайомлення з теоретичним матеріалом. Слабке володіння основним програмним матеріалом, грубі помилки в формулюванні теорем, правил і при розв'язуванні задач. Застосування теоретичних знань до розв'язання задач без аналізу одержаних розв'язків в об'ємі 35–59% від запропонованих задач. Допущені принципові помилки в обчисленнях: переплутані формули, креслення не відповідають розрахункам, порушена послідовність виконання операцій, розв'язання виконано вкрай недбало і т. п.
0–34	F	Незадовільно	Початкове ознайомлення з теоретичним матеріалом. Невміння застосовувати теоретичні знання до розв'язування задач. Недостатній об'єм знань, вмінь і навичок призводить до розв'язування з суттєвими похибками до 34% від запропонованих задач.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Архіпова О. С. Посібник для розв'язання типових завдань з курсу «Вища математика» / О. С. Архіпова, В. П. Протопопова, Є. С. Пахомова. – Харків : ХНАМГ, 2008 р. − 210 с.

2. Вороновська Л. П. Методичні вказівки до вирішення задач з вищої математики (для студентів 1 курсу усіх спеціальностей Академії). Частина 1 / Л. П. Вороновська, Є. С. Пахомова, С. С. Шульгіна. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 84 с.

3. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс – Україна, 2013. – 648 с.

4. Вища математика : Збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик та ін. – Київ : А.С.К., 2005. – 480 с.

5. Кривуца В. Г. Вища математика. Практикум / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – Київ : ЦУЛ, 2003. – 536 с.

6. Колосов А. І. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» : у 2-х модулях. Модуль 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної (для студентів денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050201 – Системна інженерія) / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 230 с.

7. Печеніжський Ю. Є. Посібник для розв'язування задач з вищої математики / Ю. Є. Печеніжський, С. О. Станішевський. – Харків : ХДАМГ, 2003. – 100 с.

8. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

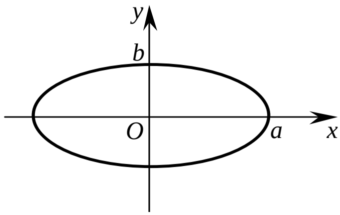
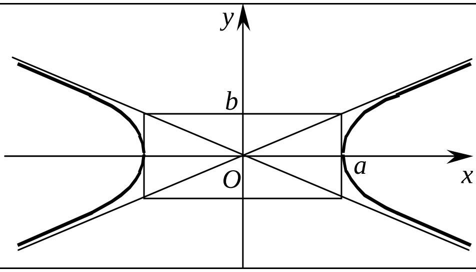
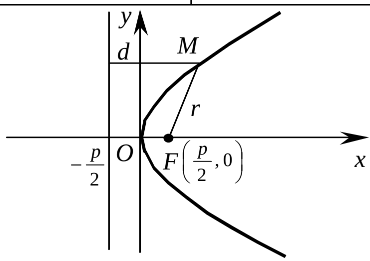
9. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 88 с.

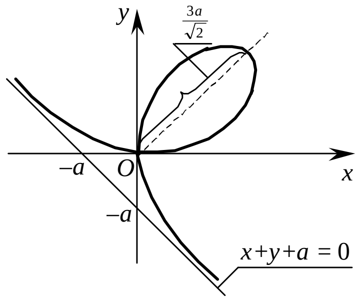
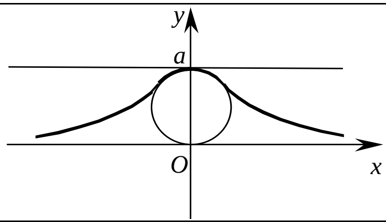
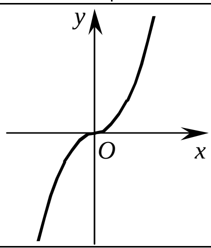
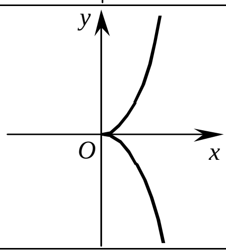
ДОДАТКИ

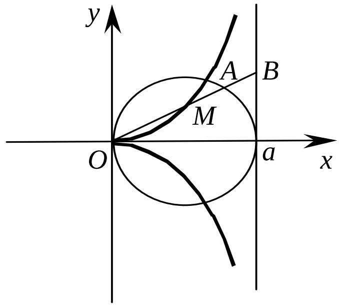
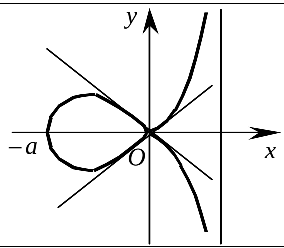
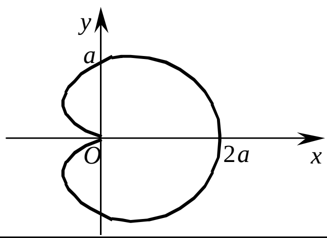
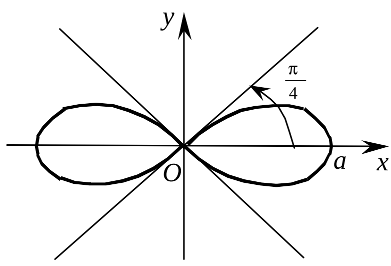
Додаток А

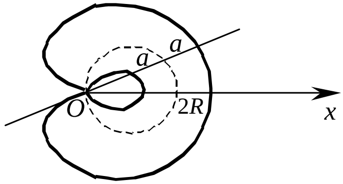
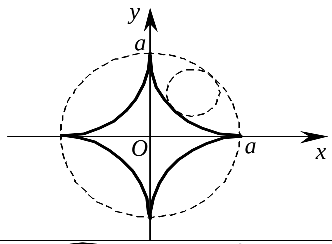
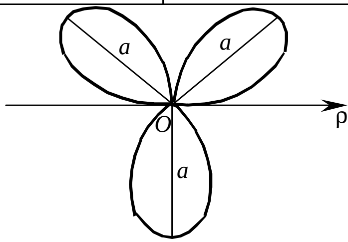
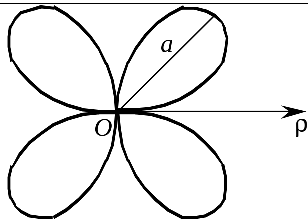
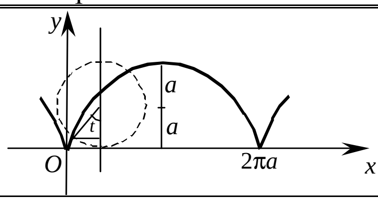
Деякі важливі криві

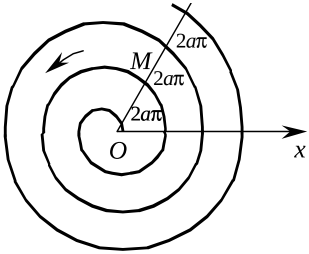
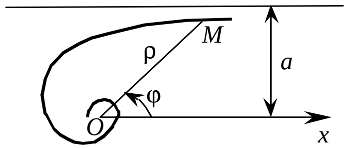
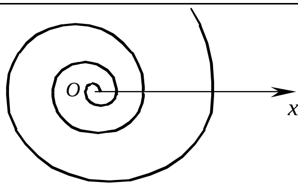
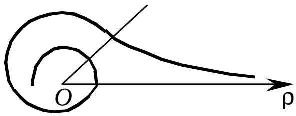
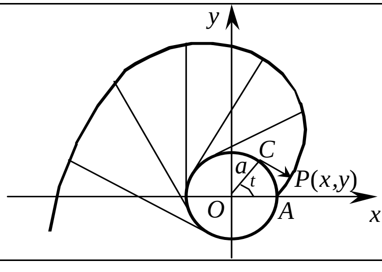
Таблиця А.1 – Деякі важливі криві

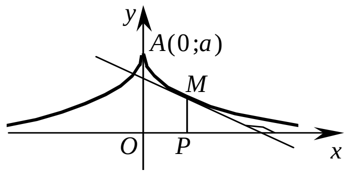
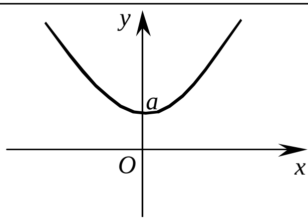
№ з/п	Назва, рівняння	Зображення
1	2	3
	Криві другого порядку	
1	Еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$	
2	Гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$ $\begin{cases} x = a\,ch\,t, \\ y = b\,sh\,t \end{cases}$ (для правої гілки)	
3	Парабола $y^2 = 2px$	

1	2	3
	Криві третього порядку	
4	Декартів лист $x^3+y^3-3axy=0$; $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$	
5	Локон Аньєзі (версієра) $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$.	
6	Кубічна парабола $y=x^3$.	
7	Напівкубічна парабола $y=x^{3/2}$.	

1	2	3
8	Цисоїда Диоклеса $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$; $\begin{cases} x = a t^2 \big/ (1+t^2), \\ y = a t^3 \big/ (1+t^2); \end{cases}$ $\rho = \dfrac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$.	
9	Строфоїда $y^2 = x^2 \dfrac{a+x}{a-x}$; $\rho = -\dfrac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$.	
Криві четвертого і вищих порядків		
10	Кардіоїда $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 =$ $= 4a(x^2 + y^2)$; $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.	
11	Лемніската Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 =$ $= a^2 (x^2 - y^2)$; $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.	

1	2	3
12	Завиток Паскаля $(x^2+y^2-2Rx)^2=$ $=a^2(x^2+y^2)$; $\rho=2R\cos\varphi+a$.	
13	Гіпоциклоїда (астроїда) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$.	
14	Трипелюсткова троянда $\rho=a\sin 3\varphi \;\; (\rho\ge 0)$.	
15	Чотирипелюсткова троянда $\rho=a\left\|\sin 2\varphi\right\|$.	
Трансцендентні криві		
16	Циклоїда $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$	

1	2	3
17	Спіраль Архімеда $\rho = a\varphi \ \ (\rho \geq 0)$.	
18	Гіперболічна спіраль $\rho = \dfrac{a}{\varphi} \ \ (\rho > 0)$.	
19	Логарифмічна спіраль $\rho = e^{a\varphi}$.	
20	Жезл $\rho = \dfrac{a}{\sqrt{\varphi}}$.	
21	Евольвента (розгортка) кола $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$	

1	2	3
22	Трактриса $x = a\ln\left(a - \sqrt{a^2 - y^2}\right) -$ $- \ln y + \sqrt{a^2 - y^2}$; $\begin{cases} x = a\left(\ln tg\dfrac{t}{2} + \cos t\right) \\ y = a\sin t \end{cases}$	
23	Ланцюгова лінія $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) =$ $= a\,ch\dfrac{x}{a}$.	

Додаток Б

Правила диференціювання та формули похідних

Таблиця Б.1 – Правила диференціювання

№ з/п	Словесне формулювання	Аналітичний запис
1	2	3
	1 Основні правила	
1	Похідна суми (різниці). Похідна алгебраїчної суми дорівнює відповідній сумі похідних доданків.	$(u+v-w)' = u'+v'-w'$
2	Похідна добутку сталого множника на функцію. Сталий множник можна виносити за знак похідної.	$(Cu)' = Cu'$
3	Похідна добутку двох функцій. Похідна добутку двох функцій дорівнює виразу: похідна першого співмножника, помножена на другий співмножник без змін, плюс перший співмножник без змін, помножений на похідну другого співмножника.	$(uv)' = u'v+uv'$
4	Похідна дробу з двох функцій. Похідна відношення двох функцій дорівнює відношенню двох виразів: у чисельнику – різниця добутків похідної першої функції на другу без змін, а потім першої без змін на похідну другої функції; у знаменнику – квадрат другої функції.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
	2 Додаткові правила	
5	Похідна складеної функції. Похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну внутрішньої функції.	$y = y(u(x))$; $y'_x = y'_u\, u'_x$
6	Правило диференціювання неявної функції. Продиференціювати ліву і праву частини рівняння, що задає неявно функцію (розглядаючи вирази, що містять цю функцію, як складені функції), а потім з одержаної рівності виразити шукану похідну.	$F(x.y)=0$; $(F(x.y))' = 0'$

1	2	3
7	Правило логарифмічного диференціювання: спочатку застосувати попереднє логарифмування лівої та правої частини рівняння, що задає функцію, а потім результат продиференціювати як неявну функцію.	$\ln y = \ln f(x)$; $(\ln y)' = (\ln f(x))'$
8	Похідна оберненої функції. Похідна оберненої функції дорівнює величині, оберненій до похідної прямої функції.	$x = f^{-1}(y)$; $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$
9	Похідна параметрично заданої функції. Похідна функції, яка задана у параметричній формі, дорівнює відношенню похідних за параметром від залежної та незалежної змінних.	$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases}$ $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$
10	Зв'язок між похідною і диференціалом. а) Похідна дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала аргументу. б) Диференціал функції дорівнює добутку похідної на диференціал аргументу.	а) $y' = \dfrac{dy}{dx}$; б) $dy = y'\,dx$
11	Похідні вищих порядків. а) Друга похідна функції – це похідна від першої похідної. б) n -та похідна – це похідна від $(n-1)$-шої похідної.	а) $y'' = (y')'$; б) $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$
12	Друга похідна параметрично заданої функції. .	$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases}$ $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$

Таблиця Б.2 – Формули похідних

№ з/п	Функція	Похідна
1	2	3
1 Основні формули		
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^{a}\right)' = a u^{a-1} \cdot u'$
2.а		$x' = 1$
2.б		$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2.в		$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^{2}} \cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \cdot u'$
3.а	Експонента	$\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$
4	Логарифмічна функція	$\left(\log_{a} u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
4.а	Натуральний логарифм	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5	Синус	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
6	Косинус	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
7	Тангенс	$\left(tg\ u\right)' = \frac{1}{\cos^{2} u} \cdot u'$
8	Котангенс	$\left(ctg\ u\right)' = -\frac{1}{\sin^{2} u} \cdot u'$
9	Арксинус	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$

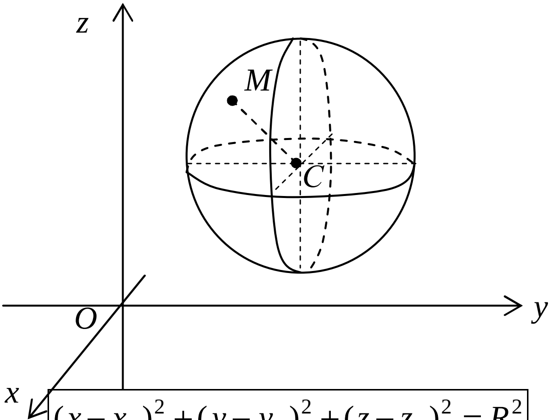
Закінчення таблиці Б.2

1	2	3
10	Арккосинус	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	Арктангенс	$(arctg\ u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12	Арккотангенс	$(arcctg\ u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
2 Додаткові формули		
13	Показниково-степенева функція	$(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + \ + u^v \ln u \cdot v'$
14	Гіперболічний синус	$(sh\ u)' = ch\ u \cdot u'$
15	Гіперболічний косинус	$(ch\ u)' = sh\ u \cdot u'$
16	Гіперболічний тангенс	$(th\ u)' = \dfrac{1}{ch^2\, u} \cdot u'$
17	Гіперболічний котангенс	$(cth\ u)' = -\dfrac{1}{sh^2\, u} \cdot u'$

Додаток В

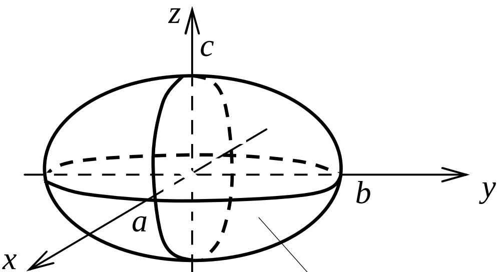
Поверхні другого порядку

Сфера



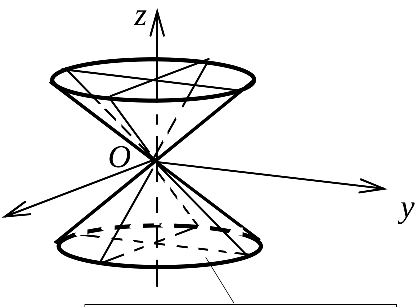
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

Еліпсоїд загального вигляду



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

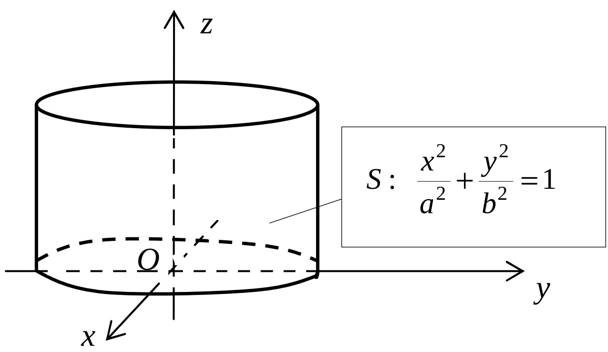
Конус другого порядку (еліптичний конус)



$$S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

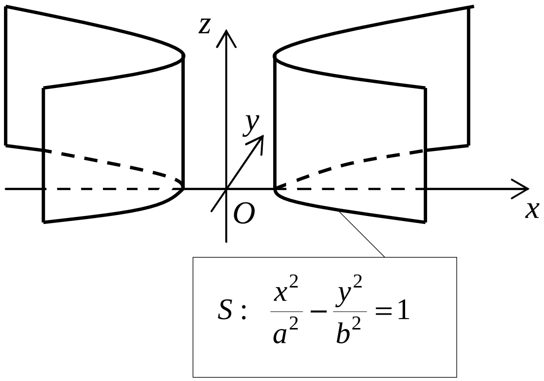
Циліндричні поверхні

Еліптичний циліндр

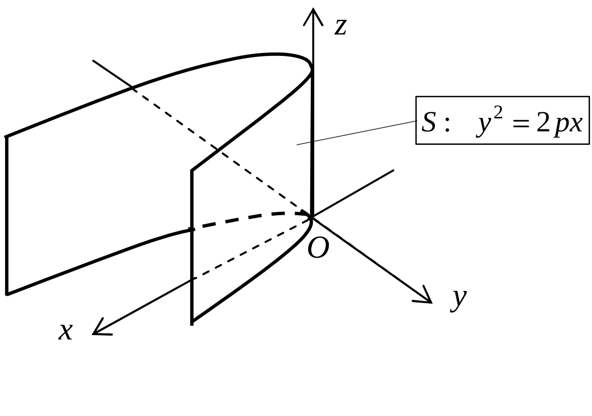


$$S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

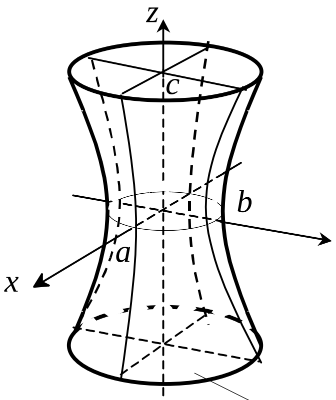
Гіперболічний циліндр



Параболічний циліндр

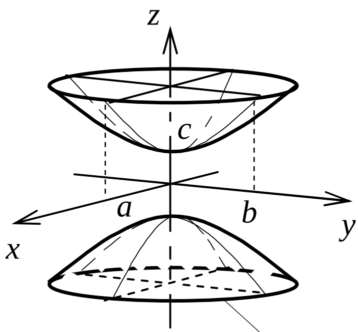


Однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду



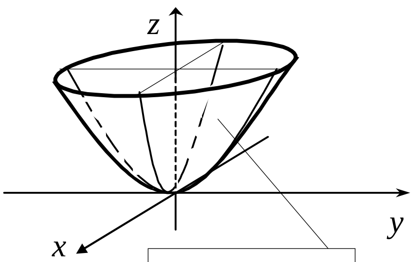
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Двопорожнинний гіперболоїд загального вигляду



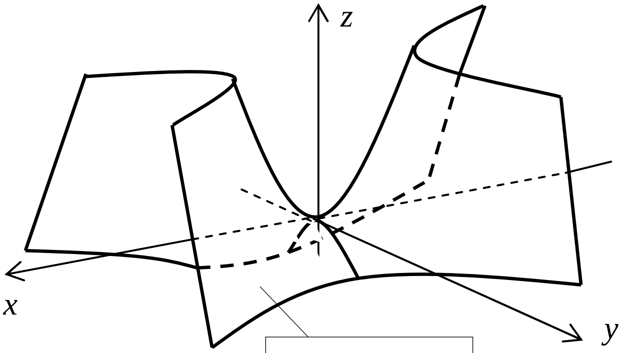
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Параболоїд загального вигляду (еліптичний параболоїд)



$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$

Гіперболічний параболоїд



$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$$

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять і самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
МОДУЛЬ 1
Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної

(*для студентів денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Системна інженерія*)

Укладачі : **Колосов** Анатолій Іванович,
Якунін Анатолій Вікторович

Відповідальний за випуск *С. М. Мордовцев*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2016, поз. 166 М

Підп. до друку 13.01.2017 р. Формат 60×84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 6,0
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства ім. О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014